Digitized by Google

XI
S.C.
1771

ELEMENTA
PRÆCIPUA
EUCLIDIS GEOMETRIÆ
PLANÆ AC SOLIDÆ

EX

CONICIS ETIAM, AC SPHÆRICIS SECTIONIBUS

Collectæ, faciliorique methodo demonſtratæ

ACCEDUNT

ARITHMETICÆ, ET ALGEBRÆ
PRINCIPIA

Philoſophiæ ſtudioſis maxime neceſſaria.

AUCTORE S. C. S. J. L.

ROMÆ MDCCLXXI.

Typis Archangeli Caſaletti ad S. Euſtachium

Superiorum Facultate.

QUis ignorat, ii qui Mathematici vocantur, quanta in obſcuritate rerum, & quam recondita in arte, & multiplici ſubtilique verſentur? Quo tamen in genere ita multi perfecti homines extiterunt, ut nemo fere ſtuduiſſe ei ſcientiæ vehementius videatur, quin, quod voluerit conſequutus ſit.

Cicero de Oratore Lib. 1.

Google

PRÆFATIO.

QUI ſit nunc in philoſophicis diſciplinis Euclidis uſus, ii ſolum ignorare poſſunt, qui aut Euclidem ipſum nunquam in manus ſumpſerunt, aut recentem invectam in ſcholas methodum, qua ætate hac noſtra philoſophia traditur prorſus ignorant. Dialecticæ neceſſaria cognitio ſemper fuit, ſine qua nihil neque a philoſopho, neque vero a quoquam, cuicunque ſtudeat facultati, effici unquam potuit; jam prope par Euclidis cognitio ab iis requiritur non ſolum, qui ad mathematicas diſciplinas penitus addiſcendas ſe conferre meditantur, ſed ab illis etiam, qui eam tantum philoſophiæ partem, quæ phyſica appellatur ſibi cognoſcendam putent. Quare quo noſtrorum diſcipulorum utilitati conſuleremus, peropportunum viſum eſt, ita eos in Geometricis initiari, ut ad Philoſophicas diſciplinas ſatis inſtructi, paratique veniant. Illud in Euclide occurrebat incommodi, quod ejus prælectio tota in unici anni anguſtiam compingi non poterat: adcedebat, quod niſi ad eam exquiſitum ingenium, acutum & perſpicax ab auditoribus adferretur, in ſumma rerum difficillimarum ignoratione verſari cogerentur, tum ob poſitionum difficultatem, tum ob earundem copiam, quibus tyronum præſertim ingenia aut debilitantur, aut obruuntur. Animadverti etiam ea fere, quæ ad Philoſophiæ

phiæ cognitionem neceſſaria ſunt, ſolidorum libris contineri, qui in deſcriptione librorum Euclidis undecimi, & duodecimi recenſentur: neque vero hi libri ante ſextum explicari diſcipulis poſſunt. Hæc ego mecum cogitans, & diſcipulorum utilitatem unice propoſitam habens, poſitionum Euclidearum numerum ad 50. contraxi, quibus probe perſpectis, atque perceptis, ſatis opis ad reliqua percipienda, quæ a Philoſophis tradi ſolent, ane diſcipulis meis allaturum exiſtimavi. Euclidis poſitionibus appendices addidi, quæ ex Sphæricis Theodoſii, ex Conicis, & ex Geometria Practica ea delibarent, quæ juvenem Philoſophum ignorare prorſus dedeceret. Quibus præterea adjunxi duos alios tractatus ſatis quidem perbreves, ex Arithmetica, & Algebræ facultatibus excerptos, ſed ni fallor diſtincte propoſitos; qui quanquam ultimo ſint loco conſtituti, nihil tamen obſtat, quominus uterque, aut Arithmeticæ tractatus ſaltem, omnium prior addiſcatur. Itaque feci, ut qualemcunque meum in hoc ipſo perficiendo ſuſceptum laborem diſcipulis meis exhibeam; quibus confido fore, ut ſi minus opus hoc meum probabunt, animum certe erga eoſdem ſane benevolum, de eorumque progreſſu maxime ſollicitum non aſpernabuntur.

LIBER I.

DEFINITIONES.

1. **P**unctum eſt ſignum, in quo nulla menſura conſideratur.

2. *Linea* eſt magnitudo, in qua ſola conſideratur longitudo.

3. *Linea recta* ea eſt, quæ inter duo puncta duci poteſt breviſſima.

4. *Superficies* eſt magnitudo, in qua conſideratur longitudo, & latitudo.

5. *Superficies plana* illa eſt, cui undequaque accommodari poteſt recta linea.

6. *Corpus* eſt magnitudo, in qua conſideratur triplex menſura, longitudo, latitudo, & profunditas.

Vides igitur in corpore tres menſuras conſiderari, in ſuperficie duas, in linea unicam, in puncto nullam.

7. *Angulus planus* eſt inclinatio duarum linearum AB, AC (*Fig.* 1.) in eodem plano exiſtentium, quæ *latera anguli* vocantur.

Hic nota I. in angulo non attendi longitudinem linearum, ſive enim lineæ integræ ſint, ſive ſecentur in I, L, ſemper angulus, ſeu inclinatio ipſarum, eadem manet prope punctum A, quod *vertex* denominatur.

Nota II. angulum vel nominari poſſe per unicam litteram verticis, ut ſi dicatur angulus A; vel tribus litteris, eam nominando

mediam, quæ eſt in vertice, ut ſi dicatur, angulus CAB, vel BAC; non enim dici poteſt ABC, cum B littera media non ſit in vertice.

8. *Anguli æquales* ii ſunt, quorum ſi unum latus, & vertex ſuperimpoſita cohæreant, alterum latus etiam congruit. Aliter: ii ſunt, quorum eadem eſt menſura (*Vid. defin.* 15.).

9. *Angulus rectus* eſt, cum linea CA cadens ſupra FB (*Fig.* 2.) in neutram inclinat partem, nec verſus F, nec verſus B. Ipſæ vero lineæ dicuntur *perpendiculares*.

Coroll. I. Si duo puncta F, B aſſumantur hinc inde æquidiſtantia ab A, omnia & ſingula puncta perpendicularis CA æqualiter diſtabunt ab ipſis F, B: ideſt, lineæ CF, CB æquales erunt; ſicut etiam OF, OB, &c., cum talia puncta in neutram inclinent partem.

Coroll. II. Si conſtet duo puncta rectæ AC æqualiter diſtare a duobus BF, ipſa erit perpendicularis.

Coroll. III. A puncto A unica tantum perpendicularis erigi poteſt, unica enim linea æquidiſtare poteſt a punctis BF. Similiter unica perpendicularis dimitti poteſt a puncto C.

10. *Obtuſus angulus* eſt, qui rectum excedit, ut LOF (*Fig.* 3) major recto AOF.

11. *Acutus angulus* eſt, qui recto minor eſt, ut COF.

12. *Circulus* eſt figura plana unius curvæ ambitu comprehenſa (*Fig.* 4) in cujus medio punctum eſt, a quo ad curvam ipſam omnes re-

ctæ

ctæ CA, CF ſunt æquales: Punctum vero ipſum vocatur *centrum*.

13. Curva circulum ambiens dicitur *peripheria*, vel *circumferentia*. Recta NH circulum per centrum ſecans vocatur *diameter*, ejus dimidium *radius*, ſeu *ſemidiameter*.

14. *Gradus* ſunt partes, in quas peripheria dividitur. Tota nempe circumferentia ſive magni, ſive parvi circuli concipitur, commoditatis cauſa, diviſa in partes 360, ejus dimidium in 180, quadrans in 90 &c., quæ gradus vocantur. Quilibet vero gradus ſubdividitur in partes 60, quæ dicuntur minuta; quodlibet minutum ſubdividitur iterum in 60 minuta ſecunda; & ſic deinceps.

15. *Menſura angulorum* ſunt gradus circumferentiæ inter anguli crura interceptæ, ſi centrum circuli ſtatuatur in anguli vertice: id eſt, ſi anguli vertex C cohæreat cum centro circuli, dicetur angulus eſſe tot graduum, quot continentur in arcu AF.

16. *Triangulum rectilineum* eſt plana ſuperficies (*Fig.* 5) tribus rectis lineis comprehenſa.

17. Triangulum attentis lateribus, vel eſt *Æquilaterum*, cum latera omnia ſunt æqualia (*Fig.* 5): vel *Iſoſcele*, cum duo tantum latera æquantur (*Fig.* 13): vel *Scalenum*, cum nullum latus habet alteri æquale (*Fig.* 15).

18. Attentis angulis, quadruplex eſt triangulum, vel enim omnes ſunt æquales, diciturque *Æquiangulum*, (*Fig.* 5): vel omnes ſunt acuti, & vocatur *Acutangulum*, vel unus eſt rectus, & dicitur *Triangulum Rectangulum*

A 4 (*Fig.* 6)

(*Fig.* 6) : vel unus eſt obtuſus , diciturque *Obtuſangulum*) *Fig.* 15) .

19. *Hypothenuſa* eſt recta VL , quæ opponitur angulo recto R , (*Fig.* 6) .

20. *Rectæ lineæ parallelæ* , illæ dicuntur , (*Fig.* 7) quæ etiamſi, in infinitum protendantur , eandem ubique ſervant diſtantiam inter ſe . Diſtantia vero ſumitur in perpendiculari AN .

21. *Parallelogrammum* eſt figura quadrilatera , in qua duo quælibet latera oppoſita ſunt parallela . Quadruplex autem eſt illius ſpecies. Prima dicitur *Quadratum* , (*Fig.* 8) cum omnia latera , & omnes anguli ſunt æquales , ac proinde recti . Secunda vocatur *Rectangulum* , (*Fig.* 10) cum omnes anguli , non vero latera ſunt æqualia . Tertia *Rhombus* , cum omnia latera non vero anguli æquantur (*Fig.* 9) . Quarta *Rhomboides* , cum non æquantur , nec omnia latera , nec omnes anguli . (*Fig.* 11) .

22. Linea MS per angulos oppoſitos ducta vocatur *diagonalis* , ſeu *diameter* .

23. *Trapezium* eſt figura quadrilatera , in qua nullum latus æquatur alteri .

24. Reliquæ figuræ plurium laterum vocantur communi nomine *Poligonæ* .

25. *Angulus externus* generatur , cum latus unum protenditur . Sic externus eſt OSI , (*Fig.* 9 , 11) vel LOI (*Fig.* 5) .

AXIO-

AXIOMATA.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et quod uno æqualium majus, aut minus eſt, majus etiam, aut minus eſt altero.

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanent, æqualia erunt.

4. Si æqualibus addas inæqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ ejuſdem ſunt dimidia; dupla, tripla &c. æqualia ſunt.

7. Quæ mutuò ſibi congruunt, æqualia ſunt.

8. Totum eſt majus ſua qualibet parte; & æquale omnibus partibus ſimul ſumptis.

9. Si duæ rectæ, duo triangula, duo quadrata, duo circuli &c. ſibi mutuo congruant, æquales erunt; & viciſſim.

10. Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales.

11. Recta rectam perpendiculariter ſecans, 4 angulos rectos facit.

12. Si recta AN (*Fig.* 7) perpendicularis ſit uni ex parallelis, perpendicularis erit quoque alteri. Et ſi binæ AL, NI perpendiculares fuerint eidem AN, erunt inter ſe parallelæ.

Hujuſmodi axioma 12 ab aliquibus inter propoſitiones collocatur, operoſa fultum demonſtratione: videtur tamen inter axiomata potius relinquendum; cum ex ipſa terminorum conſideratione pateat: vel, ſi mavis, ex definitione quadrati. Cum enim quadratum bina latera PM, SH (*Fig.* 8) parallela habeat, & angulos MH rectos (*Defin.* 21), evidens fit parallelas MP, HS communem habere perpendicularem MH; & illas fore parallelas, ſi MH ſit utrique perpendicularis.

13. Binæ rectæ ſpatium non comprehendunt.

14. Lineæ qualibet in unico puncto ſeſe interſecant; cum nullam habeant craſſitiem (*Defin.* 2).

PROPOSITIONES.

Propoſitio IV. *Nobis* 1.

SI duo triangula Z, X (Fig. 12) *æquales habuerint angulos A, H, & æqualia mutuo latera HN, AF; HL, AE, etiam baſes EF, LN, & areas, & angulos prope baſes habebunt æquales.*

Demonſtratur. Angulus A ſuperimponatur ſibi æquali H: evidens eſt (*per Defin.* 8, & *Axiom.* 9) latera AE, AF caſura ſuper lateribus HL, HN: ſed ipſa latera ſupponuntur mutuo æqualia: ergo puncta E, F congruent punctis L, N: tota igitur triangula ſibi mutuo congruunt, quapropter (*Axiom.* 7)

baſes

baſes EF, LN æquantur; ſimiliterque anguli prope baſes E, L; F; N; & tota triangula: quod erat demonſtrandum.

Scholion. Nobis Prop. 2.

Viciſſim; ſi baſes EF, LN, & anguli prope baſes E, L; F, N mutuo æquales fuerint, etiam verticales anguli A, H, & reliqua latera mutuo æqualia erunt.

Demonſtratur. Baſis EF ſuperimponatur æquali LN; cadent bina puncta E, F, ſuper binis L, N; ſed anguli E, L; F, N ſupponuntur æquales: ergo latera EA, FA, congruent lateribus LH, NH (*Defin.* 8:) igitur punctum A, utrique lateri commune, veniet ſupra punctum H: triangula ergo tota ſibi mutuo congruunt; quapropter æquales erunt anguli ad verticem, & latera mutuo, & areæ: q. e. d.

Propoſitio V. *Nobis* 3.

In triangulo Iſoſcele MTI (Fig. 13) *anguli prope baſim M, I æquales inter ſe ſunt.*

Demonſtratur. Triangulum Z intelligatur iterum poſitum in X; ſed ſitu inverſo, ita ut, puncta M, E idem ſint, puncta I, V pariter idem ſint. Fit evidens, quod, ſi baſes nunc directe ſuperimponantur, punctum M cadet ſupra V, punctum I ſupra E. Jam vero, centro E, intervallo IT, deſcribe arcum LF; patet punctum T caſurum in aliqua parte hujus arcus. Centro V intervallo MT deſcribo

arcum HN; punctum T cadet etiam in aliqua parte hujus arcus: cadet ergo in puncto A communi utrique arcui (*Axiom.*14). Similiter oſtenditur ob æqualitatem laterum, verticem trianguli X eſſe in puncto A: ergo triangula Z, X ſibi mutuo congruunt: hinc angulus M congruit angulo V (*Axiom.* 7) ideſt angulo I; q. e. d.

Propoſitio VI. *Nobis* 4.

Viciſſim. Si anguli prope baſim LAN, LNA (Fig. 14) æquales fuerint, triangulum NLA erit Iſoſcele.

Dem. Si negas triangulum NLA eſſe Iſoſcele; erit igitur Iſoſcele aliud NVA, ſupra, vel infra L. Ergo (*per præced.*) angulus VAN æquatur alteri VNA; ſed VAN (*per hypotheſim*) æquatur LNA: ergo (*Axiom* 1) LNA, VNA æquales pariter ſunt, quod eſt impoſſibile (*Axiom.*8) negari ergo nequit &c.

Propoſitio VIII. *Nobis* 5.

Si tria latera trianguli Z (Fig. 15) *AT, TE, EA æqualia fuerint mutuo tribus lateribus trianguli X, MV, VN, NM, etiam anguli A, T, E, æquabuntur mutuo angulis M, V, N.*

Dem. Si baſis AE ſuperimponatur ſibi æquali MN, congruent bina puncta A, E binis M, N. Tum vero centro N, intervallo ET deſcribatur arcus FI; patet verticem T caſurum in aliquo puncto hujus arcus. Similiter cen-

centro M, intervallo AT, deſcribatur arcus LH, vertex T erit etiam in aliqua parte hujus arcus: erit ergo in communi ſectione V. Eodem modo oſtenditur verticem trianguli X eſſe in ſectione arcuum: ergo triangula Z, X ſuperimpoſita congruunt. Itaque (*Axiom.* 7) anguli A, T, E æquantur mutuo angulis M, V, N: q. e. d.

Propoſitio XIII. *Nobis* 6.

Si ſupra rectam NL (Fig. 17) *cadit alia recta, aut duos angulos rectos facit, aut duobus rectis æquales.*

Dem. Vel enim cadit perpendiculariter, ut AF: tum vero evidens eſt, efficere duos rectos AFN, AFL. Vel cadit oblique, ut HF: tunc autem, cum bini anguli HFL, HFN, idem ſpatium occupent, ac duo recti, conſtat, efficere ſummum duorum rectorum: q. e. d.

Coroll. I. Idem demonſtratur de pluribus rectis lineis concurrentibus in puncto F.

Coroll. II. Eodem modo oſtenditur, quod ſi duæ, aut plures rectæ ſeſe interſecent in eodem puncto O (*Fig.* 18) efficient angulos quatuor rectis æquales.

Propoſitio XIV. *Nobis* 7.

Si binæ rectæ HO, AO (Fig. 19) *ita concurrerint cum alia FO, ut efficiant binos rectos angulos, aut binis æquales, ipſæ duæ rectæ in directum jacebunt, ſive erunt unica recta.*

Dem.

Dem. Si negas; in directum ergo jacebunt aliæ HO, ZO: igitur bini anguli HOF, FOZ efficiunt ſummam duorum rectorum (*Prop.* 13) ſed eamdem ſummam efficiunt HOF, FOA: (*per hypoth.*): ergo FOA, FOZ æquales ſunt; quod eſt impoſſibile &c. (*Axiom.* 8).

Propoſitio XV. *Nobis* 8.

Si duæ rectæ AI, EV (Fig. 18) *ſe ſecuerint in O, erunt anguli AOE, VOI, ad verticem oppoſiti, æquales.*

Dem. Angulus AOE inſimul cum AOV efficiunt ſummam duorum rectorum (*Prop.* 13). Eamdem ſummam efficiunt, idem AOV, inſimul cum IOV. Dempto igitur AOV, communi utrique ſummæ, æquales remanent IOV, AOE (*Axiom.* 3): q. e. d.

Propoſitio XX. *Nobis* 9.

Omnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt majora.

Demonſtratio patet ex definitione lineæ rectæ.

Propoſitio XXVII. *Nobis* 10.

Si recta FH (Fig. 20) *ſecet binas parallelas AL, EV; erunt primo, æquales alterni anguli AOH, OHV. Secundo, externus FOL æqualis interno ad eamdem partem OHV. Tertio bini interni LOH, OHV efficient ſummam duorum rectorum.*

De-

Demonſtratur prima pars. Duc perpendiculares HM, ON, habebis duo triangula Z, X, in quibus latera HM, ON æquantur, cum ſint diſtantia parallelarum (*Defin.* 20): & ſunt parallela (*Axiom.* 12): igitur etiam latera MO, HN æqualia ſunt: OH vero eſt latus commune utrique triangulo; igitur tria latera in Z æquantur mutuo tribus lateribus in X. Hinc (*per Prop.* 8) triangula ſunt æqualia, & angulus MOH in Z æquatur alteri OHN; quod erat primum.

Secunda pars. Bini FOL, MOH æquantur, quia oppoſiti ad verticem (*Prop.* 15) bini MOH, OHN æquantur (*per primam partem*): ergo bini FOL, OHN etiam æquantur (*Axiom.* 1), quod erat ſecundum.

Tertia pars. FOL, inſimul cum LOH efficiunt ſummam duorum rectorum (*Prop.*13): ſed FOL, & OHN æquales ſunt (*per* 2. *partem*): ergo LOH, & OHN efficiunt eamdem ſummam: quod erat tertium.

Prop. XXVIII. & XXIX. *Nobis* 12.

Viciſſim; ſi duas rectas AL, EV (Fig 21) *ſecans recta FH, æquales fecerit alternos angulos AOH, OHV: aut externum FOL parem interno OHV; aut tandem binos internos pares duobus rectis; illæ binæ rectæ erunt parallelæ.*

Prima pars. Si negas: parallelæ igitur erunt aliæ EV, ZX: ergo alterni anguli ZOH, OHV æquales ſunt (*Prop.* 27); ſed æquales ſupponuntur AOH, OHV; ergo ZOH, AOH æquales etiam ſunt; quod eſt impoſſibile &c.

Eodem

Eodem modo demonſtratur ſecunda, & tertia pars.

Propoſitio XXXII. *Nobis* 12.

Pars prima.

In omni triangulo EHT (Fig. 22) *externus angulus FHT æquatur duobus internis oppoſitis E, T ſimul ſumptis.*

Dem. Ducatur HA parallela ad ET. Quoniam binas parallelas HA, ET ſecat recta FE, erit externus *m* æqualis interno E (*Prop.* 27) & quoniam eaſdem parallelas ſecat recta HT, erit alternus *u* æqualis alterno T: ergo bini ſimul *m*, *u* æquantur binis E, T: q. e. d.

Secunda pars.

Omnis trianguli tres ſimul anguli E, n, T efficiunt ſummam duorum rectorum.

Dem. Bini *m*, *u* æquantur binis E, T (*per* 1 *partem*); terni *m*, *u*, *n* efficiunt ſummam duorum rectorum (*Coroll.* 1. *Prop.* 13): ergo eamdem ſummam efficiunt E, *n*, T: q. e. d.

Coroll. I. Cognito uno angulorum, cognoſcitur ſumma reliquorum: omnes enim ſimul conſtant gradibus 180.

Coroll. II. Habita ſumma duorum angulorum, habetur & tertius.

Coroll. III. Si duo anguli unius trianguli æquales fuerint duobus alterius, etiam tertius tertio æqualis erit.

Pro-

Propoſitio XXXIV. *Nobis* 13.

Anguli, & latera oppoſita in parallelogrammo æqualia ſunt, ipſumque a diametro biſſecatur (Fig. 23).

Dem. prima pars. Ducatur AF. Quoniam parallelas AL, TF ſecat recta AF, erunt æquales alterni *r*, *r* (*Prop.* 27). Et quoniam parallelas AT, FL ſecat eadem AF, æquales erunt alterni *o*, *o*: ergo bini ſimul *o*, *r*, ſive totus A æquatur toti F: q. e. d.

Secunda pars. Habemus duo triangula ALF, ATF, quorum communis baſis eſt AF, & anguli *o*, *r* prope baſim mutuo æquantur in utroque: ergo reliqua latera mutuo etiam æquantur (*per Schol. Prop.* 4) id eſt, AL æquatur TF, & AT æquatur LF: q. e. d.

Tertia pars. Tria latera trianguli ALF æquantur tribus lateribus ATF: ergo ipſa triangula æquantur (*Prop.*8) id eſt, parallelogrammum a diametro biſſecatur; q. e. d.

Scholion.

Ex hac propoſitione eruitur methodus dimetiendi areas quadratas, & parallelogrammorectangulas (*Fig.* 10): ut enim habeatur area PH, ſatis eſt multiplicare menſuras baſis HS per menſuras altitudinis HM; quod quidem nititur in æqualitate laterum oppoſitorum, & patet ex ipſa figura.

Propo-

Propoſitio XXXV. *Nobis* 14.

Parallelogramma FAEH, FILH, (Fig. 24) *quæ ſunt ſuper eadem, vel æquali baſi FH, & inter eaſdem parallelas AT, FZ, æqualia ſunt.*

Dem. Ex conſtructione ipſa habentur duo triangula AFI, EHL, quæ dico eſſe æqualia, cum tria latera unius æquentur tribus lateribus alterius. Nam AF æquatur EH (*Prop.* 34) cum ſint latera oppoſita in parallelogrammo FE: ſimiliter FI, HL, latera oppoſita parallelogrammi FL. Tertium præterea latus AI æquatur tertio EL; partes enim AE, IL æquantur eidem FH, utpote latera oppoſita parallelogrammorum, ac proinde æquantur inter ſe: addita autem utrique media linea EI, habetur tota AI æqualis toti EL: tria igitur latera trianguli unius æquantur tribus alterius; ac proinde æquantur ipſa triangula (*Prop.*8). Nunc vero, ablato communi plano EOI, fit evidens (*Axiom.*3) æquari duo plana FOEA, HOIL: his addatur commune triangulum FOH, erit totum FAEH æquale toti FILH, q. e. d.

Scholion.

Diximus in Schol. Prop.34. rectanguli menſuram haberi ex multiplicatione baſis FH per altitudinem HE: igitur, etiam menſura parallelogrammi obliqui FL habetur ex eadem multiplicatione FH per HE, ſeu LM perpendicularem a vertice ad baſim protenſam, quæ proinde dicenda eſt altitudo parallelogrammi.

Pro-

Propoſitio XXXVII. *Nobis* 15.

Triangula AFE, ALE (Fig. 25) *ſuper eadem, vel æquali baſi AE, & inter eaſdem parallelas conſtituta, ſunt æqualia.*

Dem. Ducantur ET, EV parallelæ ad AF, AL. Parallelogramma AT, AV æqualia ſunt (*Prop.* 35): ſed triangula AFE, ALE ſunt ipſorum dimidia (*Prop.* 34): ergo ipſa etiam æquantur (*Axiom.* 6) q. e. d.

Propoſitio XLI. *Nobis* 16.

Si triangulum ALE (Fig. 26) *ſit ſuper eadem baſi, vel æquali cum parallelogrammo AT, & inter eaſdem parallelas AX, FZ æquale erit ipſius dimidio.*

Dem. Ducatur FE. Triangula AFE, ALE æqualia ſunt (*Prop.* 37), ſed AFE eſt dimidium parallelogrammi AT: ergo ALE æquatur ipſius dimidio. q. e. d.

Scholion.

Hinc eruitur ratio menſurandi areas triangulares: cum enim parallelogrammum habeatur ex multiplicatione baſis per integram altitudinem perpendicularem, triangulum, ipſius dimidium, habebitur ex baſis AE multiplicatione per dimidium altitudinis LH, a vertice ad baſim (ſi opus eſt) protenſam.

Pro-

Propoſitio XLVII. *Nobis* 17.

Si ſuper tria latera trianguli NHV (Fig. 27) *rectanguli in V, eformentur tria quadrata, prout in figura, dico quadratum Hypothenuſæ HLAN, æquari quadratis reliquorum laterum HF, ZV ſimul ſumptis.*

Dem. Quoniam anguli IHV, LHN ſunt æquales, utpote anguli quadratorum, dempta communi parte IHN, æquales remanebunt NHV, LHI (*Axiom.* 3); ſed latera NH, HV æqualia ſunt mutuo lateribus LH, HI cum ſint eorumdem latera quadratorum: æquantur ergo triangula NHV, LHI (*Prop.* 4): hinc, cum angulus V ſupponatur rectus, talis erit etiam LIH: ſed præterea rectus eſt angulus quadrati HIF; lineæ ergo LI, IF conſtituunt unicam rectam (*Prop.* 14) parallelam ad HV (*per defin. quadrati*). Nunc vero, ductis VL, VT parallela ad HL; triangulum HVL eſt dimidium quadrati VI, cum ſint ſupra eamdem baſim HV, & inter eaſdem parallelas HV, LF (*Prop.* 41): idem etiam triangulum eſt dimidium parallelogrammi OL, cum ſint ſupra eandem baſim HL, & inter eaſdem parallelas HL, VT: quadratum ergo HF æquatur parallelogrammo HT (*Axiom.* 6). Eodem pacto oſtenditur quadratum ZV æquari parallelogrammo TN: totum ergo LN æquatur binis ſimul IV, ZV. q. e. d.

Corollarium. Hinc deducitur quadrati cujuſlibet diagonalem eſſe lateribus ejuſdem incom-

men-

menſurabilem, id eſt, dari non poſſe menſuram, quæ conveniat ſimul lateribus & diagonali. Fac enim e. g. latus MP (*Fig.8*) eſſe 4, & PS pariter 4; unius quadratum erit 16, & ſumma utriuſque 32: igitur quadratum diagonalis MS continebit 32: ſed nullus eſt numerus, qui per ſemetipſum ductus det 32: ergo menſura laterum non convenit diagonali.

MONITUM.

Secundi libri propoſitiones principaliores ad algebram (a n. 137.) *tranſmittendas putamus: apud Analiſtas enim frequenter uſurpantur; apud alios nonniſi rariſſime.*

LIBER III.

DEFINITIONES.

1. TAngens circuli eſt recta AF (Fig.28), quæ in circulum ita incurrit, ut ipſum non ſecet.

2. Linea AL (*Fig.29*) circulum utcunque ſecans dicitur *Chorda*, ſeu *Subtenſa*.

3. Partes AVL, ANL a chorda diviſæ dicuntur *ſegmenta*.

4. *Angulus in ſegmento* dicitur quilibet angulus NHV (*Fig.40*), cujus vertex eſt in peripheria, cujuſque latera tranſeunt per extremitates chordæ.

5. Hu-

5. Hujuſmodi angulus dicitur inſiſtere arcui oppoſito NZV.

6. Sector circuli eſt pars comprehenſa inter duos radios, ut ACF (*Fig.* 4).

7. Si ducatur in circulo diameter FN (*Figur.* 28), & aſſumpto arcu FO, vel angulo FTO, ſi ab extremo O cadat perpendicularis diametro OL, hæc erit *Sinus Rectus* arcuum FO, OHN, vel angulorum FTO, NTO; & FL *Sinus Verſus* ejuſdem anguli. Ductis deinde reliquis lineis prout in figura, erunt FA *Tangens*, AT *Secans*, OF *Chorda* ipſiuſmet arcus, vel anguli. Erunt quoque ATH *Angulus complementi* ad 90 gradus; OV, HA *Sinus*, & *Tangens Complementi*. Et quoniam HT radio æqualis perpendicularis eſt diametro ab extremitate quadrantis; hinc radius peculiari nomine vocatur *Sinus Totus*.

PROPOSITIONES.

Propoſitio XI, XII. *Nobis* I.

Si duo circuli ſeſe tangant interius in A (Figur. 30), *aut exterius in O* (Fig. 31), *recta VA ducta per utriuſque centrum tranſit per contactum*.

Dem. de contactu interno. Si negas: ſit igitur centrum minoris in N, ita ut recta VNL non tranſeat per contactum. Duc NA. Radii circuli majoris VA, VL æquales ſunt (*per defin. circuli*): æquales etiam ſunt radii circuli minoris NA, NO: addatur horum utrique eadem

eadem linea NV, erit ſumma ONV æqualis ſummæ ANV: ſed ANV major eſt quam AV (*Prop.* 20. *lib.*1.), id eſt, quam LV: ergo etiam ONV major eſt quam LV; quod eſt impoſſibile.

Dem. de contactu externo. Si negas: ſint ergo centra in MF, ita ut recta MF non tranſeat per contactum. Duc ad contactum MO, FO. Æquales erunt MO, MZ, & FO, FH (*per defin. circuli*): ſed binæ MO, OF majores ſunt quam MF (*Prop.*20. *lib.*1.): ergo etiam MZ, HF majores ſunt quam MF; quod eſt impoſſibile.

Propoſitio XIII. *Nobis* 2.

Contactus externus & internus circulorum, tum inter ſe, tum cum linea recta, fit in unico puncto.

Dem. de contactu externo (*Fig.* 32). Si contactus non fit in puncto O, fiet in parte diviſibili OI. Duc AN per centra; hæc (*propoſit.*11) tranſibit per contactum O. Duc deinde AI, NI. Binæ AO, AI æquantur, utpote radii circuli; ſimiliter binæ NO, NI: ergo ſumma AIN æquatur ſummæ AON, quod eſt impoſſibile.

De contactu interno. (*Fig.*33). Si contactus non fit in ſolo puncto A, fiet in parte diviſibili AO. Duc LNA per centra, & contactum (*prop.*12), & deinde LO, NO. Radii LA, LO æquantur, ſicut etiam NA, NO. His ultimis addatur NL: ergo ſumma LNA, ſeu

ſeu LO æquatur ſummæ LNO, quod eſt impoſſibile (*prop.* 20. *lib.* 1).

Dem. de linea recta. Circulus major minorem tangit in unico puncto A; eo igitur magis recta ZX illum tangit in puncto.

Propoſitio XIV. *Nobis* 3.

Chordæ æquales AL, IIM (Fig. 29) *æqualiter a centro diſtant.*

Dem. Curvaturæ ſimiles & æquales AVL, HNM ſuperimpoſitæ ſibi mutuo congruunt (*Axiom.* 9. *lib.* 1.): ergo altitudines ZV, NX æquales ſunt: æquales igitur ſunt etiam reliquæ partes radiorum OZ, OX. q. e. d.

Propoſitio XVIII. *Nobis* 4.

Radius a centro N (Fig. 34) *ad contactum A perpendicularis eſt tangenti ZX.*

Dem. Per centrum N ducatur diameter parallela tangenti. Radius NA eſt diſtantia parallelarum: ergo perpendicularis eſt utrique (*Defin.* 20. *&* *Axiom.* 12. *lib.* 1.), ac proinde tangenti: q. e. d.

Propoſitio XIX. *Nobis* 5.

Si ex contactu A (Fig. 34) *dimittatur perpendicularis AN, hæc per centrum tranſibit.*

Dem. Linea NA a centro ad contactum eſt perpendicularis tangenti (*prop.* 18); ſed nequit erigi in A niſi unica perpendicularis (*Coroll.* 3.

roll. 3. *Defin.*9. *lib.*1.) : ergo quæ ex contactu demittitur perpendicularis eſt : q. e. d.

Propoſitio XX. *Nobis* 6.

Angulus ad centrum VOT (Fig. 35. 36. 37) *duplus eſt anguli ad peripheriam VAT, cum idem arcus eſt baſis angulorum.*

Dem. Triplex eſt caſus : vel enim vertex anguli O ad centrum, eſt in uno crure anguli ad peripheriam (*Fig.* 35), vel eſt intra (*Fig.* 36), vel cadit extra (*Fig.* 37). *Primus Caſus.* Quoniam O eſt centrum, æquales erunt lineæ OA, OV utpote radii circuli; id eſt, triangulum AOV eſt Iſoſcele : æquantur ergo anguli A, V (*prop.*5. *lib.*1) : Sed VOT externus æquatur binis ſimul V, A (*prop.* 32. *lib.*1) : ergo eſt duplus ſolius A : q. e. d.

Secundus Caſus. Ducatur per centrum AOL (*Fig.* 36). Angulus VOL eſt duplus VAL (*per primum Caſum*) : Similiter TOL duplus eſt TAL : ergo totus TOV duplus eſt totius TAV : q. e. d.

Tertius Caſus. Ducatur per centrum AOL. Totus angulus LOV duplus eſt totius LAV (*per* 1. *Caſum*) : pars LOT dupla eſt partis LAT (*per* 1. *Caſum*) : ergo reliqua pars VOT dupla eſt reliquæ VAT : q. e. d.

Corollarium. Cum totus arcus VT ſit menſura anguli ad centrum O (*Defin.*15. *lib.* 1), patet, menſuram anguli ad peripheriam A eſſe dimidium arcus VT, cui inſiſtit.

Propoſitio XXI. *Nobis* 7.

Omnes anguli A, A, A (Fig. 38) *inſiſtentes eidem arcui VT ſunt æquales.*

Dem. Omnium menſura eſt dimidium arcus VT (*Coroll. præced.*) : ſunt igitur omnes æquales ; q. e. d.

Propoſitio XXII. *Nobis* 8.

Anguli oppoſiti H, Z cujuslibet quadrilateri circulo inſcripti (Fig. 40) *duobus rectis æquantur.*

Dem. Menſura anguli H eſt dimidium arcus NZV (*coroll. prop.* 20) : menſura anguli Z eſt pariter dimidium NHV : ergo menſura utriuſque ſimul eſt integer ſemicirculus, ſeu duo recti : q. e. d.

Propoſitio XXXI. *Nobis* 9.

Angulus L (Fig. 40) *ab extremitatibus diametri ſemicirculo inſiſtens, rectus eſt : angulus H factus in ſegmento majori, eſt recto minor : angulus Z in ſegmento minori, recto major.*

Dem. Menſura anguli L eſt dimidium ſemicirculi, ſeu quadrans (*coroll. prop.* 20) : menſura H eſt dimidium arcus minoris NZV; menſura Z eſt dimidium arcus majoris NHV : ergo L eſt rectus ; H minor ; Z major : q. e. d.

Pro-

Propoſitio XXXII. *Nobis* 10.

Angulus NAL (Fig. 39) *a tangente & ſubtenſa factus, par eſt angulo V, qui fit in ſegmento alterno.*

Dem. Dico menſuram anguli NAL eſſe dimidium arcus AL. Ducatur enim AF per centrum, perpendicularis (*prop.* 18). Cum angulus NAF ſit rectus, ejus menſura erit dimidium ſemicirculi FLA; ſed dimidium arcus FL eſt menſura anguli FAL (*coroll. prop.*20): ergo menſura anguli NAL eſt dimidium reliqui arcus LA. Jam vero angulus V habet pro menſura dimidium ipſius LA: ergo anguli V, & LAN æquantur: q. e. d.

Propoſitio XXXV, XXXVI. *Nobis* 11.

Si chordæ TA, LV (Fig. 77. 78), *ſe ſecuerint in circulo, erit rectangulum TOA, ex partibus unius Rectæ TO, OA conſtructum, æquale rectangulo LOV ex partibus alterius.*

Demonſtratio facilius dabitur poſt Prop. 17. lib. 6. Schol. 2.

LIBER V.

DEFINITIONES.

1. RAtio eſt relatio inter duas quantitates, ſecundum majus & minus: dum nempe dicimus, quoties una alteram contìnet, vel in illa continetur: e. g. quantitates numericæ 8, & 4 hanc inter ſe habent relationem, quod 8 bis contineat 4: & 4 bis contineatur in 8.

Quamquam applicabile hoc ſit omnibus quantitatum generibus; deinceps tamen numericis utplurimum utemur, claritatis gratia.

2. Quantitates inter ſe collatæ vocantur *termini*. Quæ primo nominatur dicitur *antecedens*; quæ ſecundo loco *conſequens*.

3. *Exponens* eſt numerus ille, qui declarat quoties antecedens contineat, vel contineatur in conſequente: e g. exponens inter 4, & 8 eſt 2; nam 4 bis continetur in 8. Dici etiam poteſt $\frac{1}{2}$, ſi active loquamur, nam 4 continet dimidium 8.

4. *Rationes ſimiles, æquales, eædem* (qui termini in præſenti idem omnino ſignificant), illæ ſunt, quarum idem eſt exponens. Exemplum: rationes 2 ad 4, 5 ad 10, 50 ad 100 &c. ſunt eædem, ſimiles, æquales; quia omnium exponens eſt 2. Uno verbo, donec non mutatur exponens, non mutatur ratio.

5. *Ratio ſimplex eſt*, quæ concipitur, tamquam non compoſita ex aliis.

6. *Ra-*

6. *Ratio* vero *compoſita* eſt, quæ oritur ex multiplicatione aliarum rationum. Sed hæc definitio eſt ulterius explicanda, cum ſit clavis ulterioris Geometriæ & Philoſophiæ.

In omni ratione tria conſiderantur jam dicta, antecedens, conſequens, & exponens. Sit igitur aliqua ratio (*Fig.* 41), cujus antecedens 2, conſequens 8, exponens 4, qui in medio ſcribatur diſtincto in loco. Sub hac ratione alia notetur, cujus antecedens 3, exponens 2, conſequens 6. Multiplica inter ſe, tum antecedentes, tum exponentes, tum conſequentes; habebis antecedentem compoſitum 6, exponentem 8, conſequentem 48, & rationem aliam 6 ad 48, quæ quidem ratio dicitur compoſita ex ſuperioribus; quia termini 6 & 48, eam inter ſe proportionem habent, quæ exprimitur per exponentem 8, ortum ex multiplicatione ſuperiorum. En practice, quid ſit ratio compoſita.

Duo autem ſunt hic attente notanda. 1: ut habeatur ratio compoſita, neceſſarium non eſſe componere antecedentes, ſed ſatis eſſe componere exponentes. Sic quia ratio 2 ad 16 eundem habet exponentem, ſeu eadem eſt (*Defin.* 4) cum ratione 6 ad 48, etiam hæc dici poteſt compoſita, ex duabus 2 ad 8, 3 ad 6.

Secundum: ſemper in componendo rationes, eodem modo nobis eſſe loquendum, vel active *quoties continet*, vel paſſive *quoties continetur*: aliter enim exponentes non occurrent debito modo; nam cum interrogamus, quo-

ties 4 contineatur in 8, exponens eſt 2; cum vero, quoties contineat, exponens eſt longe diverſus, nempe $\frac{1}{2}$.

7. *Ratio duplicata*, alio nomine *quadrata*, ea eſt quæ componitur ex duabus æqualibus, ſeu ſimilibus (*Vid. fig.* 42), in qua ratio 12 ad 48 exponentem habet compoſitum ex duobus æqualibus; atque ea de cauſa, vocatur unius duplicata.

8. *Ratio triplicata, quadruplicata* &c. ea eſt, cujus exponens oritur ex tribus quatuor, aut pluribus æqualibus (*ut in fig.* 43).

9. *Proportio* proprie eſt collatio duarum ſaltem rationum, cum nempe inter plures terminos idem exponens adeſt, ut 2, 4; 5, 10. Signum vero proportionis æqualis ſeu analogiæ ſequenti forma exprimitur A : B = C : D, vel A . B : : C . D.

10. *Proportio ordinata* eſt, cum termini ordine recto diſponuntur, ut 2 : 4 : : 6 : 12. *Inverſa* ſeu *reciproca* eſt, ſi perturbentur, ut 2 : 4 : : 12 : 6.

11. *Progreſſio* vocatur, cum plures termini ſunt ſucceſſivi. Hæc vero vel eſt *Geometrica*, ſi procedat per æquales exponentes, & exprimitur ſequenti modo ∺ 2, 4, 8, 16 &c. vel *Arithmetica*, ſi procedat per æquales exceſſus, & ſic exprimitur ÷ 2, 4, 6, 8, 10 &c.

In progreſſione geometrica binæ proprietates interim notandæ. Prima, quod ſi accipiantur 3 quilibet termini paribus intervallis, ut 2, 8, 32; *primus ad tertium rationem habet duplicatam primi ad ſecundum*. Si vero accipian-

cipiantur 4 termini, *primus ad quartum rationem habebit triplicatam*: & ſic deinceps. Secunda, quod acceptis iiſdem 4 terminis, *productum extremorum æquatur producto mediorum*: & ſi tres accipiantur, *productum extremorum par eſt quadrato medii*.

In progreſſione Arithmetica, aſſumptis pari intervallo 4 terminis, *æquantur ſummæ extremorum ac mediorum*: aſſumptis vero 3, *ſumma extremorum æquatur duplo medii*. Iſta omnia conſideranti ſeries facile patent.

PROPOSITIONES.

Theoremata hujus libri, adeo ſunt clara, ut fere per ſe pateant. Nos ea de cauſa, adductis celebrioribus propoſitionibus, addemus tantummodo unicuique aliqualem ejus expoſitionem. Dicemus præterea, quid ſit argumentari alternando, permutando, invertendo, dividendo, componendo, convertendo rationem, & ex æquo.

Propoſitio IX. *Nobis* 1.

Si duæ quantitates eamdem habeant rationem ad tertiam aliam, æquales erunt inter ſe: & viciſſim.

Demonſtratio conſtat perpendenti terminos, ſi enim duo globi eundem habeant exponentem reſpectu tertii, e. g. ſint dupli, nequeunt non eſſe æquales.

Propoſitio XV. *Nobis* 2.

Partes ſimiles ſunt inter ſe ut tota, & viciſſim.

Dem. Aſſumantur duo quilibet numeri; e.g. 100, & 20: notetur exponens 5. Dico eundem eſſe exponentem inter dimidia 50 & 10, inter quartas partes 25, & 5 &c. quod quidem evidens eſt.

Propoſitio XVI. *Nobis* 3.

Si fuerint A. T::L. F (Fig. 44); *erunt etiam alternando. A:L::T:F* (Fig. 45).

Demonſtratio patet, ſi apponas numeros juxta diviſiones figuræ; invenies enim eundem exponentem inter A, L, atque inter T & F.

Eodem modo diſcurre de omnibus ſequentibus propoſitionibus, quarum titulum tantummodo indicabimus.

Corollarium. Nobis prop. 4.

Si fuerint (Fig. 44) *A. T::L.F, erunt etiam* invertendo *T.A::F.L* (Fig. 46).

Propoſitio XVII. *Nobis* 5.

Si fuerint (Fig. 44) *A. T::L.F, erunt etiam* Dividendo *A — T:T::L — F:F* (Fig. 47).

Pro-

Propoſitio XVIII. *Nobis 6.*

Si fuerint (Fig. 44) *A . T : : L . F* , *erunt etiam* Componendo *A + T : T : : L + F : F* (Fig. 48).

Corollarium. Nobis prop. 7.

Si fuerint A : T = L : F (Fig. 44) ; *erunt etiam* Convertendo rationem T : *A — T : : F : L — F* (Fig. 49).

Propoſitio XXII. *Nobis* 8.

Si inter ſe conferantur duæ ſeries (Fig. 50), *fuerintque A : E = L : M , E : F = M : N , F : H = N : T erunt etiam* ordinate , *ſeu* ex æquo *A prima ad H ultimam , ut L prima ad T ultimam .*

LIBER VI.

DEFINITIONES.

1. FIguræ ſimiles eæ ſunt , quæ omnes angulos habent mutuo inter ſe æquales , & latera mutuo proportionalia ; e. g. duo triangula Z , X (*Fig.* 51) ſunt ſimilia , ſi tres anguli A , L, N æquentur tribus F , T, V ; & LA ita contineat TF , ut LN continet TV &c. vel ita LA contineat LN , ut TF continet TV &c.

2. *Figuræ reciprocæ* ſunt, in quibus ita unum latus primæ excedit aliud ſecundæ, ut unum ſecundæ aliud primæ.

3. *Figuræ regulares* ſunt eæ, in quibus omnia latera, & omnes anguli ſunt æquales, ut Z, vel X (*Fig.* 61).

Lemma I.

Si duæ quantitates multiplicent tertiam aliam, producta erunt, ut quantitates multiplicantes.

Conſtat ex inſpectione numerorum; ſi enim 2, ac 6 multiplicent eundem numerum; e. g. 5, producta 10, & 30 ſunt inter ſe, ut 2, ac 6.

Lemma II.

Recta AT (Fig. 52) *ſecans tres, aut plures parallelas æquidiſtantes, ab eis dividitur in partes æquales AO, TO.*

Dem. Ducatur HOL perpendicularis. Triangula AOH, LOT æquales habent angulos ad O, cum ſint oppoſiti ad verticem: æquales etiam habent binos ad HL, utpote rectos: æqualia deinde habent latera OH, OL (*per hypoth.*); ergo (*per Schol. prop.* 4. *lib.* 1.) æquales ſunt etiam AO, OT: q. e. d.

PROPOSITIONES

Propoſitio I.

Parallelogramma duo TZ, VM (Fig. 53.) *æqualium altitudinum AN, FI ſunt inter ſe, ut baſes.*

Dem.

Dem. TZ eſt productum baſis LZ per altitudinem AN (*Schol. prop.*35. *lib.*1.) : VM eſt pariter productum baſis HM per altitudinem FI ; ſed altitudines ſupponuntur æquales : ergo (*Lemm.* 1) parallelogramma ſunt ut baſes : q. e. d.

Scholion.

Idem demonſtratur de triangulis LAZ,HFM, quæ ſunt producta baſium per dimidias altitudines (*Schol. prop* 41. *lib.*1).

Corollarium. Si baſes fuerint æquales , tum triangula , tum parallelogramma erunt , ut altitudines.

Propoſitio II.

Si in triangulo ALF (Fig. 54) *ducatur recta ZH parallela uni lateri AF , ſecabit reliqua latera proportionaliter , id eſt , ita erit LZ ad LH , ut ZA ad HF .*

Dem. Ducantur plures *i n*; *i n* parallelæ ad ZH , & æquidiſtantes inter ſe . Hoc poſito , in tot æquales partes (*Lemm.* 2.) diviſa erit LA , in quot LF , in tot LZ , in quot LH &c: ergo ita erit LZ ad LH , ut ZA ad HF : q.e.d.

Nota : poſſe hic fieri argumentationes libri 5. e. g. ergo componendo LA : LZ : : LF : LH . Quæ argumentationes valent in omni analogia .

Propoſitio IV. *Nobis 3.*

Triangula Z , *X* (fig. 51) *ſibi mutuo æquiangula habent latera circa æquales angulos pro-*

portionalia : id eſt , ita erit LA : LN : : TF : TV , vel LA : TF : : LN : TV .

Dem. Angulus F ſuperimponatur angulo A ſibi æquali . Linea TV cadet in HM , parallela ad LN (*prop.*28. *lib.* 1) : ergo ita erit AL ad AH , ſeu FT , ut AN ad AM &c. (*vid. prop.*2. *& annot.*) .

Propoſitio VIII. *Nobis* 4.

Si in triangulo ALF (fig. 55) *demittatur perpendicularis ab angulo recto L ad hypothenuſam dividetur triangulum in duo Z , X inter ſe , & toti ſimilia .*

Dem. Primo , in quolibet horum triangulorum habetur angulus rectus , uti patet . Deinde angulus A communis eſt triangulo majori ALF, & minori Z : ergo tertius angulus F æquatur tertio ALO (*coroll.* 3. *prop.*32. *lib.* 1) . Similiter F communis eſt triangulo X , & majori ALF : ergo tertius FLO æquatur tertio A : igitur tria triangula ſimilia ſunt (*defin.* 1. *& prop.* 4) q. e. d.

Coroll. Recta LO eſt media proportionalis inter AO & OF ; nam ita eſt in Z , AO ad OL ; ut eadem OL ad OF in X (*prop.* 4) .

Propoſitio XIV. *Nobis* 5.

Si duo parallelogramma Z , X (fig. 56) *habuerint æquales angulos AON , HOL , etiam latera circa ipſos angulos habebunt reciproca ; id eſt , ita erit AO ad OL , ut HO ad ON . Viciſſim ,*

ciſſim, ſi reciprocant latera circa æquales angulos, ſunt æqualia.

Dem. Z, & X ita ſtatuantur ad angulos O, ut AOL ſit unica recta: erit etiam HON unica recta, ob angulos ad verticem æquales. Perficiatur parallelogrammum V. Quoniam Z, & X ſupponuntur æqualia, eandem habebunt rationem ad V (*prop.* 9. *lib.* 5): ſed Z eſt ad V, ut AO ad OL: X eſt ad V, ut HO ad ON (*prop.* 1): ergo ita eſt AO ad OL, ut HO ad ON: q. e. d.

Secunda pars: Supponitur HO eſſe ad ON, ut AO ad OL; ſed X eſt ad V, ut HO ad ON (*prop.* 1): ergo eſt etiam, ut AO ad OL. Porro hæc eadem eſt ratio Z ad V; ergo Z, X habent ſimilem rationem ad V, id eſt, ſunt æqualia: q. e. d. (*prop.* 9 *lib.* 5).

Propoſitio XV. *Nobis* 6.

Idem, eodem modo, demonſtratur de triangulis Z, X (*fig.* 57).

Propoſitio XVI. *Nobis* 7.

Si 4 rectæ A, N, L, V (fig. 58) *fuerint proportionales, rectangulum factum ex prima, & ultima æquatur rectangulo ex mediis: & viciſſim.*

Dem. Ex A fiat altitudo rectanguli X (*figura* 56), ex N altitudo Z, ex L baſis Z, ex V baſis X: erit X factum extremarum, Z factum mediarum; quæ proinde reciprocabunt baſes,

baſes, & altitudines: ergo erunt æqualia (*prop.* 14): q. e. d.

Secunda pars. Rectangula Z, X ſupponuntur æqualia: reciprocant igitur baſes, & altitudines (*prop.* 14): igitur ſi diſſolvantur, prodibunt ex lateribus 4 proportionales; X dabit primam, & ultimam; Z vero medias.

Propoſitio XVII. *Nobis* 8.

Si tres rectæ A, N, V fuerint proportionales, rectangulum extremarum æquatur quadrato mediæ (fig. 59).

Dem. Media N intelligatur iterum poſita in L: Hoc caſu (*per præced.*) factum ex A, V æquatur facto ex N, L, id eſt quadrato N: q. e. d.

Scholion I. In his propoſitionibus extat fundamentnm regulæ, quam vocant *Auream*, ob ejus uſus eximios; cum nempe ex datis tribus quantitatibus quæritur quarta proportionalis; quam regulam ſequenti verſu proferre ſolent.

Duc ternum in medium, productum divide primo.

Sit exemplo hæc quæſtio: ſi canalis in horis 2 fundit libras aquæ 10, quot libras fundet horis 99? Duc ternum 99 per medium 10, habebis productum 990: hoc productum diviſum per primum 2 dabit quotum 495, libras nempe quæſitas. Demonſtratio patet, nam productum extremorum 495 & 2 æquatur facto mediorum 99 & 10.

Scholion II. Ex dictis habetur quoque demonſtratio prop. 35, 36 libri 3, cujus titulum eo in loco vide; ſic vero oſtenditur (*fig.*77, 78). Duc LA, TV: Triangula LOA, TOV ſunt ſimilia (*prop.* 4), cum ſint mutuo æquiangula; nam anguli ad verticem O opponuntur; bini L, T inſiſtunt eidem arcui AV (*prop.*20. *lib.*3); ac proinde æquantur; bini vero AV inſiſtunt pariter eidem arcui LT: ita ergo eſt AO : OL :: VO : OT (*prop.* 4): hinc vero (*prop.* 16) rectangulum extremarum AOT æquatur rectangulo mediarum VOL: q. e. d.

Corollarium. Hinc ſi AT diameter perpendiculariter ſecet chordam LV, rectangulum AOT æquatur quadrato LO.

Propoſitio XIX, XX. *Nobis* 9.

Rectangula duo ſimilia, vel triangula, vel aliæ figuræ poligonæ ſimiles ſunt inter ſe in ea ratione, in qua ſunt quadrata laterum ejuſdem nominis, ſeu homologorum: id eſt, ſunt in ratione duplicata ipſorum laterum, aut etiam diametrorum.

Dem. de Rectangulis. Quoniam Z, X (*fig.*60) ſupponuntur ſimilia; ita erit AM ad LH, altitudo ad altitudinem, ut baſis MN ad baſim HF: bini antecedentes erunt in Z, conſequentes in X; ſed Z eſt productum antecedentium, & X conſequentium (*ſchol. prop.* 34. *lib.* 1): ergo, cum ubique ſit idem exponens, erit ratio X ad Z, duplicata cujuslibet antecedentis ad ſuum conſequens (*defin.* 6. & 7 *lib.*5).

Dem.

Dem. de Triangulis. Nam duo MAN, HLF ſunt dimidia rectangulorum Z, X: ſunt ergo inter ſe, ut rectangula (*prop.* 15. *lib.* 5): id eſt, in ratione duplicata laterum homologorum: q. e. d. Hinc vero patet ad diagonales AN, LF cum etiam hæ ſint latera homologa. Patet etiam eamdem rationem extendi ad quælibet triangula ſimilia, non rectangula, qualia ſunt Z, X (*fig.* 51) utrumque enim, dividi poteſt in duo triangula rectangula mutuo ſimilia, ductis perpendicularibus a vertice ad baſim.

Dem. de reliquis figuris ſimilibus. Figuræ enim ſimiles, ut Z, X (*fig.* 61) reſolvi poſſunt in triangula ſimilia; quod clarum eſt per ſe, & videri poteſt apud Tacq. hoc loco: ſed quodlibet triangulum eſt ad ſuum ſimile, in ratione duplicata laterum homologorum: e. g. TZ ad EX: ergo in eadem ratione ſunt etiam figuræ ipſæ poligonæ (*prop.* 15. *lib.* 5).

Propoſitio XXIII. *Nobis* 10.

Parallelogramma æquiangula non ſimilia Z, X (fig. 56) *ſunt in ratione compoſita baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.*

Dem. Tum Z, tum X ſunt producta propriæ baſis per altitudinem: ergo bina antecedentia ſunt in Z, bina conſequentia in X: proindeque (*defin.*6. *lib.*5) ſunt in ratione compoſita baſium, & altitudinum: q. e. d.

LIBER XI.

DEFINITIONES.

1. ANgulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quam duobus planis continetur; quod recte intelligitur in angulo A corporis LZ (*fig.* 62).

2. *Priſma* eſt figura ſolida planis taliter comprehenſa, ut duo adverſa AN, LH (*fig.* 63) ſint æqualia, & parallela.

co3. Priſma nomenclaturam deſumit a prædictis planis; ſi enim ſint triangula, dicitur *triangulare*; ſi ſint quadrilatera, dicitur *quadrangulare*, & ſic de aliis. Aliud vero eſt *rectum*, ut LN (*fig.* 63), aliud *obliquum*, ut TV (*fig.* 64).

3. *Parallelepipedum* eſt priſma, quadrilaterum, cujus quodlibet planum aliud habet ſibi oppoſitum, & parallelum; ut LN, vel TV (*fig.* 63, 64).

4. *Cubus* eſt parallelepipedum, in quo omnia plana ſunt æqualia, & quadrata, ut ZL (*fig.* 62).

5. *Figuræ ſolidæ ſimiles* ſunt, quæ ſimilibus planis continentur numero æqualibus, ut HA, IE (*fig.* 63).

Lemma.

Menſura priſmatis deſumitur ex longitudine latitudine, & altitudine inter ſe multiplicatis.

Hujuſmodi lemma conſonat definitioni

6. l.

6. l. 1., quæ, cum ſit fundamentum geometriæ ſolidæ, eſt breviſſime explicanda. Sit itaque ſolidum rectum AH (*fig.* 63), cujus altitudo AL, latitudo LF, longitudo FH: menſuræ latitudinis, & longitudinis multiplicatæ dabunt 4, quod eſt planum baſeos, ſeu verius infima ſeries diviſionum corporis: hæc deinceps multiplicata per altitudinem LA, ſeu quater ſibi impoſita adæquat totum corpus, ut ex figura ipſa ſit manifeſtum. Idem dicendum de ſolido obliquo TV (*fig.* 64): eſt namque evidens, primam ſeriem totum corpus æquare, ſi toties ſibi ſuperimponatur, quot ſunt menſuræ altitudinis VZ. Menſura ergo priſmatis deſumitur ex longitudine, latitudine, & altitudine multiplicatis: q. e. d.

PROPOSITIONES.

Propoſitio XXX, XXXI, XXXII. *Nobis* 1.

Parallelepipeda æque alta ſunt inter ſe ut baſes: ejuſdem baſis ſunt, ut altitudines; ejuſdem vero altitudinis, & baſis ſunt æqualia.

Dem. Parallelepipeda æque alta ſunt e. g. LN (*fig.* 63), & TV (*fig.* 64), quæ (*per lemm. præc.*) ſunt productum baſium per altitudines: ſed altitudines ſunt æquales: ergo (*lemm.* 1. *lib.* 6) ſunt inter ſe ut baſes: q. e. d.

Hinc vero patet ſecunda pars, in qua baſes ſupponuntur æquales, altitudines inæquales: & tertia quoque, in qua baſes, & altitudines æquales ſunt. Igitur &c.

Pro-

Propoſitio XXXIII. *Nobis* 2.

Parallelepipeda ſimilia AH, EI (fig. 63.) *ſunt in ratione triplicata laterum homologorum: ſeu ſunt, ut cubi ipſorum laterum.*

Dem. Quoniam ſolida ſunt ſimilia, trina menſura HL, LF, FH proportionalis eſt trinæ EC, CS, SI: tres igitur antecedentes ſunt in ſolido majori; tres conſequentes ſimiles ſunt in minori: ergo unum eſt ad aliud in ratione triplicata cujuslibet menſuræ e. g. altitudinum: q. e. d. (*Defin.* 8. *l.* 5).

Corollarium. Quæ dicta ſunt de parallelepipedis, pari ratione intelligenda de quibuslibet priſmatibus; & primo quidem de triangularibus. Parallelepipeda enim quælibet reſolvuntur in duo priſmata triangularia æqualia, mediante plano diagonali OVNE (*fig.* 66.), in quibus intervenit eadem ratio (*Prop.* 15 *l.* 5.). Alia vero priſmata ſimilia nihil aliud ſunt, niſi ſumma plurium triangularium mutuo ſimilium. Si enim ſuper ſimilibus baſibus Z, X (*fig.* 61.) erigantur duo priſmata ad altitudines proportionales; evidens eſt, illa fore conflatum priſmatum triangularium, ſicut baſes ſunt conflatum triangulorum.

Scholion.

In corporibus ſimilibus creſcunt ſuperficies, ut quadrata laterum; ſeu in ratione duplicata: ſoliditates vero, ut cubi; ſeu in ratione triplicata.

Con-

Conſidera enim menſuras duorum corporum (*fig.* 62), in quibus latera NL, HV, habent exponentem 2. Cum quadratum 2 ſit 4, & cubus 2 ſit 8, dico exponentem ſuperficierum eſſe 4, exponentem ſoliditatum eſſe 8. Primo MV conſtat 6 faciebus, quarum quælibet 4 habet menſuras; omnium ſumma eſt 24. At vero ZL ſub latere duplo continet 6 facies, quarum quælibet habet menſuras 16; ſumma omnium 96, qui numerus quater continet 24. Secundo MV ex ſupradictis in lemmate continebit 8 menſuras ſoliditatis, ZL vero 64: igitur ſoliditas ZL octies continet MV. Sic diſcurrendum de aliis corporibus (*fig.* 63). Jam vero ſi laterum exponens eſſet 3, inveniretur ſuperficies ut 9, ſoliditas ut 27, & ſic deinceps: igitur ſuperficies ſunt in ratione triplicata: ſeu, ſuperficies ſunt ut quadrata; ſoliditates vero ſunt, ut cubi laterum homologorum.

LIBER XII.

DEFINITIONES.

In hoc libro, Euclideum ordinem ideo non obſervamus, quia eademmet demonſtratio plurimis propoſitionibus accommodatur.

1. PYramis eſt ſolidum ZH (*fig.* 65) in plano Z erectum, & deſinens continuo in punctum A. Nomen deſumit pyramis a plano baſis; alia eſt enim triangularis.

laris, alia ſexangularis, ut ZA &c. Pyramis cujus baſis eſt circulus (*fig.* 67) vocatur conica.

2. *Cylinder* eſt ſolidum ZA (*fig.* 78) duobus circulis æqualibus, & parallelis terminatum: intelligiturque generari, ſi circulum Z, ſibi ſemper parallelum erigas uſque ad A.

3. *Sphæra, ſeu globus* eſt corpus undequaque rotundum (*fig.* 70), a cujus centro ad ſuperficiem omnes lineæ ductæ ſunt æquales.

4. Figura regularis circulo inſcripta illa eſt, cujus angulorum vertices extant in peripheria circuli (*fig.* 69), & cujus omnia latera ſunt æqualia.

Lemma I.

Circulus eſt poligonum ſeu figura regularis infinitorum laterum.

Dem. Sit poligonum regulare AH (*fig.* 69) circulo inſcriptum, circa quod deſcribatur aliud lateribus duplo pluribus AL, LF &c. Eſt manifeſtum, figuram hanc ſecundam magis accedere ad circulum, quam prima; ſi vero deſcribatur tertia, hæc magis accedet, quam ſecunda; & ſic deinceps, donec figura infinitorum laterum idem ſit cum circulo: q. e. d.

Lemma II.

Cylinder (fig. 68) *eſt priſma infinitorum laterum.*

Dem. Baſis cylindri eſt circulus Z, id eſt, poligonum infinitorum laterum (*lem.* 1): cylinder vero eſt ſolidum ſuper hanc baſim ere-

ctum

ctum, menſuris plurimis baſeos ſibi ſuprapoſitis (*Lem. lib.* 11): ergo tot conſtat lateribus, quot baſis ipſa, ſeu eſt priſma infinitorum laterum.

Lemma III. *Eucl. prop.* 7.

Pyramis quælibet æquatur producto baſis per trientem altitudinis.

Dem. Sit enim cubus TH (*fig.* 66), cujus centrum L. Patet, ſi a quolibet angulo ducantur lineæ ad centrum L, ipſum dividi in ſex æquales pyramides TOZVL, quarum omnium vertex eſt in L, & baſes ſunt totidem plana cubi quadrangularia, quælibet igitur pyramis eſt ſexta pars cubi: ſed cubus æquatur producto baſis TZ, per totam altitudinem: ergo una pyramis TOZVL eſt productum baſis per ſextam partem altitudinis cubi, id eſt, per trientem altitudinis pyramidis.

Deinde; medio plano diagonali EOVN, dividitur cubus in duo priſmata triangularia æqualia, & pyramis in duas pyramides triangulares æquales, quarum quælibet eſt ſexta pars ſui priſmatis; igitur etiam pyramis triangularis æquatur producto baſis per trientem altitudinis.

Tandem pyramis quælibet ZA (*fig.* 65) reſolvi poteſt in plures triangulares per diviſiones baſis Z (quod etiam intelligitur de conica): ergo pyramis quælibet &c.

Lem-

Lemma IV.

Sphæra eſt conflatum infinitarum pyramidum HN (fig. 70), quarum omnium vertices uniuntur in centro, baſes vero extant in ſuperficie.

Si enim aſſumantur infinitæ pyramides tenuiſſimæ & æquales, ut HN, atque circa centrum H undequaque diſponantur, patet ex iis oriri debere corpus ſphæricum, & ex baſibus N globi ſuperficiem: ſphæra igitur nihil eſt aliud, niſi ſumma, aut conflatum harum pyramidum.

PROPOSITIONES.

Propoſitio II. *Nobis* 1.

Circuli ſunt inter ſe in ratione duplicata radiorum, vel diametrorum.

Dem. Circuli duo AH, TV (*fig.* 69) conſiderantur tamquam poligona infinitorum laterum (*lem.*1): ſed poligona ſunt in ratione duplicata radiorum (*prop.*19. *lib.*6), vel diametrorum: ergo in eadem ratione ſunt circuli; q. e. d.

Propoſitio VI, XI, XIV, *Nobis* 2.

Pyramides quælibet, & cylindri (fig. 65, 67, 68) *ejuſdem, vel æqualium baſium ſunt inter ſe, , ut altitudines; & viciſſim.*

Demonſtratur eo modo, quo demonſtrata eſt prop. 30. *lib.* 11. Sunt enim cylindri producta baſium per altitudines (*Lemm* 2. *hujus*, & *Lemm. lib.* 11) : Pyramides vero producta ba-

baſium per trientem altitudinis (*lem.* 3). Quæ igitur eandem habent baſim, ſunt ut altitudines &c. : q. e. d. (*lem.* 1. *lib.* 6).

Propoſitio VIII. *Nobis* 3.

Cylindri & Pyramides ſimiles ZA, NL (fig. 65, 67, 68) *ſunt inter ſe in ratione triplicata laterum homologorum, id eſt, altitudinum, vel diametrorum baſium &c.*

Dem. ut prop. 33. *lib.* 11. Quia enim ſunt corpora, trinam habent menſuram; & quia ſunt ſimilia, omnes antecedentes ſimiles extan in uno, omnes conſequentes in altero: ſunt ergo in ratione triplicata, cujuslibet menſuræ: q. e. d.

Propoſitio XVIII. *Nobis* 4.

Sphæræ ſunt inter ſe in ratione triplicata radiorum HN, ZA (fig. 70), *vel diametrorum NL, AV.*

Dem. Sphæra LN eſt conflatum infinitarum pyramidum HN (*lemm* 4). Sphæra VA eſt conflatum totidem pyramidem minorum ZA: ſed quælibet pyramis HN eſt ad quamlibet ZA in ratione triplicata altitudinum (*prop.*8), id eſt, radiorum ſphæræ: ergo tota ſumma HN, ſeu ſphæra major, eamdem habet rationem ad totam ſphæram minorem (*prop.*15. *lib.* 5), quæ proportio (*per eamdem*) extenditur quoque ad diametros, ſeu ad duplum radiorum: q. e. d.

AP-

APPENDIX I.

De iis, quæ in tribus Sectionibus Conicis philoſophus ignorare minime debet.

PYramis Conica FLH (*fig.* 79), cujus baſis FH, ſecari primo poteſt plano ad baſim parallelo, ut AN, qui *circulum* repræſentabit, primam nempè ſectionum conicarum, de qua Euclid. lib 3. Deinde ſecari poteſt plano obliquo IE cum utroque latere concurrente in I, E. Hæc ſectio figura eſt ovalis *Ellypſis* dicta, ob quandam ejus proprietatem. Tertio, ſecari poteſt plano NAZ (*fig.* 80) parallelo lateri FL, ſeu cum eo non concurrente niſi ad infinitam diſtantiam, quæ ſectio eſt figura interminata, diciturque *Parabola*. Quarto, ſecari poteſt plano EAZ (*fig.*81) lateri LH nuſquam occurrente verſus partes H; occurrente tamen verſus partes oppoſitas in V. Hoc modo habetur ſectio dicta *Hyperbola*, cui Geometræ intelligunt opponi in V hyperbolam aliam omnino æqualem. Quinto, ſecari poteſt ſectione tranſeunte per verticem L, nuſquam alibi lateribus occurrente; quæ ſectio erit *triangulum Iſoſcele*. En ſectionum conicarum primam ideam. Has vero ſectiones, cum ſint planæ deſcribi poſſe in plano, id per ſemetipſum evidens ſuppono.

DE ELLYPSI

SI fili utrunque extremum duplici clavo affigas in punctis T, F (*fig.* 71): tenſo deinde filo calamum circumducas per EVOA, ellypſim in plano deſcribes, unam ex conicis ſectionibus. In hac puncta T, F dicuntur *Poli*; C eſt *Centrum*; AV *Axis major*; ZX *Axis minor*, majori perpendicularis per centrum tranſiens; puncta A, V ſunt *Vertices*; *Diameter* eſt recta quælibet TN, vel VX (*fig.* 72) per centrum ducta; *Diametri conjugatæ* TN, VX eæ ſunt, quando omnes rectæ AZ parallelæ uni diametro bifariam dividuntur ab altera; AZ, VX bifariam diviſæ, vel ipſarum dimidia vocantur *Applicatæ*; partes vero diametri CT, OT dicuntur *Abſciſſæ*, ſeu *Sagittæ*; *Parameter* eſt recta VH (*fig.* 71) tertia proportionalis ad axes; vel eſt *Applicata* axi majori VA per focum tranſiens Principaliores Ellypſis proprietates, nunc explicandæ, ſunt tres ſequentes.

Prima proprietas.

Summa binarum rectarum FO, TO (fig. 71) *ex focis ellypſeos ad quodlibet curvæ punctum O æquatur ſemper majori axi AV.*

Hæc proprietas ſufficienter conſtat ex deſcriptione plana figuræ: talis enim ſumma æquatur conſtanter integræ fili longitudini, cui par eſt etiam axis AV.

Secun-

Secunda proprietas.

Si ex focis T, F ducantur rectæ ad quodlibet curvæ punctum O, & per ipſummet punctum ducatur etiam tangens NM, erunt ubique inter ſe æquales anguli TON, FOM.

Demonſtr. TO producatur, donec ſit æqualis axi majori, id eſt, fiat OL æqualis OF; junge FL, quam divide bifariam in I. Duc MN tranſeuntem per O, & I. Dico primo, *angulos MOF, NOT æquales fore*: nam NOT æquatur oppoſito LOI (*prop.* 15. *lib.* 1): hic vero par eſt alteri IOF (*prop.* 8. *lib.* 1); cum ſit IO latus commune, & OL, LI æquentur ipſis OF, FI. Dico ſecundo, *MN eſſe tangentem in O, id eſt, quodlibet aliud punctum ipſius præter O eſſe extra curvam*: Sumpto enim alio puncto P, ductiſque inde rectis ad L, T, F, æquales fient LP, FP (*cor.* 1. *defin.* 9. *l.* 1). Jam vero TP, LP majores ſunt quam LT, id eſt, axe majori: ergo etiam FP, TP majores ſunt axe, ac proinde punctum P eſt extra curvam.

Lemma.

Si termini unius proportionis a : e : : d : f, *multiplicent ordinate terminos alterius* b : c : : g : h, *dabunt producta proportionalia.* Appone enim numeros vice litterarum, e.g. 2 : 4 : : 3 : 6 pro primis, 2 : 6 : : 3 : 9 pro ſecundis, habebis producta 4 : 24 : : 9 : 56 ſub exponente 8, id eſt, proportionalia.

Tertia proprietas.

Quadrata applicatarum ſunt, ut rectangula abſciſſarum. E. g. quadratum AC (Fig. 72) *eſt ad quad. OV, ut rectangulum ex TC, CN, id eſt, ut rect. TCN ad rect. TON.* Hæc proprietas facilius in ipſa ſectione pyramidis, quam in plano demonſtratur. Sit pyramis FLH (*fig.* 79), in qua fieri intelligantur 4 ſectiones: FLH triangularis per verticem, & baſis centrum: NA, MX baſi parallelæ, ac proinde circulares: IE ſectio ellyptica utrunque circulum ſecans: lineæ NA, MX, cum ſint in plano trianguli, erunt diametri circulorum, & inter ſe parallelæ; recta vero IE erit axis major, aut diameter alia ellypſeos, prout ſectio triangularis per ejus vertices, vel per alia puncta tranſierit. Ducantur OT, CV; patet has eſſe ſemiordinatas, tum ad diametros circulorum, tum ad diametrum ellypſis: cum vero (*prop.* 36. *lib.* 3.) quadratum CV æquale ſit rectangulo MCX, & quadratum TO æquale rectangulo AON; erit quad. CV, ad quad. TO, ut rect. MCX ad rect. AON. Hæc autem eſſe inter ſe, ut rect. ECI ad rect. EOI, ſic oſtenditur. ICX, ION ſunt triangula ſimilia, cum baſes ex dictis ſint parallelæ: eſt igitur IC : IO :: CX : ON. Similia habentur etiam triangula AOE, MCE; igitur EC : EO :: CM : OA. Hinc autem (*lem. præced.*) rectangulum ECI ex primis antecedentibus ad EOI ex primis conſequentibus,

ut

ut MCX ex ſecundis ant. ad AON ex ſecundis conſeq., ſeu ut quad. CV ad quad. TO: q.e.d.

DE PARABOLA.

CUM parabola NAZ (*fig.* 80) non concurrat cum latere FL niſi ad infinitam diſtantiam; patet concipi illam poſſe inſtar ellypſis in infinitum oblongatæ, cujus centrum, focus unus, & vertex alter infinite diſtant a vertice A. Jam vero ſi parabola in plano deſcribatur (*fig.* 73), *vertex* erit punctum T, axis extremum: partes curvæ TN, TA dicuntur *rami*: *diameter* èſt non ſolum axis TB, ſed recta quælibet FP axi parallela: ſicut enim in ellypſi, ita & in parabola diametri non concurrunt niſi in centro, hoc autem infinite diſtat. *Tangens* eſt recta HF curvæ incurrens in F, quin illam ſecet: *focus* eſt punctum L, in quo diameter PF, quaſi reflectendo a tangente concurrit cum axe, ita ut æquales ſint anguli PFH, LFI: *parameter* principalis eſt dupla LX, ordinata axis per focum; vel TZ quadrupla diſtantiæ foci a vertice: VV, VV bifariam diviſæ a diametro FP ſunt ipſius ordinatæ. Tres circa hanc curvam proprietates explicandæ.

Proprietas prima.

Quadrata ordinatarum ſunt ut abſciſſæ: id eſt, quad. OS eſt ad quad. LX, ut OT ad LT (figur. 73). Cum enim parabola ſit ellypſis infinite

finite oblongata, quad. OS eſt ad quad. LX, ut OT multiplicata per infinitum ad LT multipl. per infinitum, id eſt (*lemm.*1. *lib.*6), ut OT ad LT.

Proprietas ſecunda.

Si ad quodlibet punctum F ducantur tres lineæ, HI tangens, FL ad focum, & FP axi parallela; ſemper anguli HFP, IFL æquales erunt. Nam FP concipi poteſt tanquam occurrens axi in altero ellypſis foco infinite diſtanti; æquales ergo erunt PFH, LFI, prout de ellypſi ſupradiximus.

Proprietas tertia.

Duæ parabolæ æquales una alteri incluſa, communemque axim habentes, magis ac magis ad ſe mutuo accedent, creſcente diſtantia a vertice, quin unquam ad contactum deveniant, intra terminos finitos. Recte intelligitur ſine figura. Si enim aliquando concurrerent, eadem ordinata in eo puncto communis eſſet utrique parabolæ. Itaque propter duplicem verticem deficeret neceſſario prima proprietas; cum idem quadratum nequeat habere proportionem duplicis diſtantiæ. Hinc hujuſmodi parabolæ dicuntur parabolæ *aſſymptotæ*.

DE

DE HYPERBOLA.

HYperbolæ geneſim jam attulimus in pyramidis ſectione; cum autem hæc curva ſit philoſophis minus neceſſaria, pauca alia videntur hic addenda. Hyperbola ZAE (*fig.* 81) fere ſemper confertur cum oppoſita TVX: *centrum* eſt punctum P æqualiter diſtans ab utroque vertice: *diameter principalis* eſt VA per centrum ducta uſque ad vertices: quælibet alia MN per P tranſiens, & curvæ occurrens dicitur etiam diameter. Suas habet hæc curva applicatas, focos, diametros conjugatas, tangentes, parametros, pluresque functiones, quarum apud geometras uſus. Nos ſequentem tantummodó proprietatem ſummis labiis attingemus.

Si recta quædam FH (*fig.* 74) a centro F incipiens, & ramus curvæ OM ſine termino protendantur, ad ſe ſemper accedent, nunquam tamen ad contactum devenient. Ratio ad hanc reducitur: quia hyperbola tali lege deſcribitur, ut omnia rectangula FZE, FZE, & inter ſe, & quadrato NO æqualia ſint: ſemper igitur diſtautia ZE debet eſſe aliqua; nam aliter linea FZ fieret tandem quadrato æqualis; quod eſt impoſſibile. Hinc recta FH vocatur *Aſſymptotos*.

APPENDIX II.

De iis, quæ circa Sphæræ Sectiones ad Aſtronomiam, Geographiam, & Nauticam neceſſaria videntur.

SPHÆRÆ GENESIS.

SI in ſemicirculo ALZ (*fig.* 75) ſtatuatur immobilis diameter AZ, & circa ipſam diametrum revolvatur ſemicirculus ab L verſus V, & iterum ab V per partes oppoſitas uſque ad L; manifeſtum eſt, ex hac revolutione generari globum, ſeu Sphæram, in qua ſequentia conſiderari poſſunt, velut hujus geneſis corollaria.

1. Radius ſphæræ eſt OL, vel OA, idem cum ſemidiametro ſemicirculi generantis ALZ.

2. Poli revolutionis ſunt A, Z.

3. Quælibet linea, vel ſemichorda OL, NF perpendicularis diametro AZ, deſcribit in revolutione peculiarem circulum LV, FX, IM, cujus ipſa eſt radius.

4. Hujuſmodi circuli eo minores ſunt, quo viciniores polis Z, A; chorda enim HI polo propinquior, minor eſt remotiore NF.

5. Semichorda maxima eſt OL, radius ſemicirculi.

6. Ac proinde circulus deſcriptorum maximus eſt VL per centrum traſiens.

7. Reliqui FX, MI, non per centrum tranſeuntes, omnes ſunt minores.

8. Cir-

8. Circuli omnes, hoc pacto deſcripti, ſunt paralleli.

9. Omnium parallelorum iidem ſunt poli Z, A. Viciſſim; ſi poli ſint iidem, circuli erunt paralleli.

10. Poli cujuslibet circuli ſunt puncta ſphæræ oppoſita.

11. Hinc, linea ZA, quæ ducitur ab uno ad alterum polum, tranſit per centrum ſphæræ; dicique poteſt *axis*; & eſt perpendicularis parallelis omnibus, quorum eſt axis.

12. Omnes circuli VL, MI &c. cum plani ſint, concipi poſſunt tanquam totidem ſphæræ ſectiones.

13. Hinc, omnis plana ſectio ſphæræ eſt circulus.

14. Sectio per centrum eſt circulus maximus; habet enim radium maximum OL. Viciſſim omnis circulus maximus eſt ſectio per centrum.

15. Omnes circuli maximi ſunt æquales; omnium enim idem eſt radius.

16. Si fiat alia ſectio ſecundum directionem AZ, erit hæc circulus maximus tranſiens per polos parallelorum, omnibuſque perpendicularis.

17. Hinc, circulus maximus AZ tranſiens per cujuſvis alterius circuli polos eſt ipſi perpendicularis.

18. Circulus maximus AZ ductus per aliorum polos, ſive ipſis perpendicularis, eos dividit bifariam: tranſit enim per omnium centra N, H,

19. Sphæra bifariam dividitur in duo hemiſphæria a quolibet circulo maximo EZ, vel AX (*fig.* 76).

20. Hinc, quilibet circulus maximus AX bifariam dividit alium quemlibet maximum EZ, etiam ſi ipſi ſit obliquum: habent enim centrum idem commune cum ſphæra: dimidium ergo OEN in uno extat hemiſphærio, dimidium aliud OZN in altero.

21. Reliqui vero circuli FL, HI paralleli ad EZ non dividuntur bifariam ab obliquo maximo AX, per eorum polos, & centra minime tranſeunte.

22. Menſura inclinationis duorum circulorum AX, EZ eſt arcus AE utrique perpendicularis, qui deſcribitur ex communi centro.

APPENDIX III.

EX GEOMETRIA PRACTICA.

Hucuſque pura theoremata, quorum major eſt neceſſitas, explicavimus: aliqua nunc ad praxim ſpectantia adducenda videntur, ne ſemper in aridis principiis defatigemur. Ommiſſis tamen demonſtrationibus, fontes indicabimus unde a tyronibus, exercitationis cauſa, facile deducantur.

Problema I. *Super datam rectam AL* (Fig. 82.) *triangulum æquilaterum conſtruere*. Centris A, & L, intervallo AL deſcribe arcus ſeſe interſecantes in F; duc FA, FL; triangulum

gulum AFL erit *æquilaterum*. Dem. pete ex Def. 12. L. 1.

Probl. 2. *Quadrante angulos obſervare*. Sit quadrans NAH (*Fig.* 83.), & angulus LAT obſervandus. Statue quadrantis centrum A in vertice anguli, & unum latus impone lineæ AT; altera linea AL ſecans quadrantis arcum, indicabit in puncto F gradus anguli quæſitos. *Defin.* 15. *L.* 1. Sit iterum obſervandus angulus elevatus NTL (*Fig.* 84.), in quo linea TL eſt horiſontalis. Appende e centro T pondus V tenui filo; applica deinde latus ET in directum cum linea TN: filum TV, plumbo pendente, indicabit in arcu AV gradus anguli NTL. Ratio eſt, quia NTA, LTV ſunt ambo recti, & dempto LTA erunt NTL = ATV.

Probl. 3. *Rectam FL* (Fig. 85.) *ſecare bifariam*. Centris L, F deſcribe eadem circini apertura 4 arcus ſeſe interſecantes in A, N; duc AN; hæc biſſecabit LF in O (*Def.* 9. *L* 1.)

Eodem pacto biſſecatur quoque angulus LAF, ſumendo ex lateribus binas æquales AL, AF, & deſcriptis arcubus ex F, L.

Probl. 4. *Ex puncto A in recta IL* (Fig. 16) *perpendicularem erigere*. Aſſume AV, AE æquales; deinde centris V, E deſcribe arcus ſeſe interſecantes in N; ducta NA, erit hæc perpendicularis (*Def.* 9. *lib.* 1).

Probl. 5. *Dato triangulo Z* (Fig. 15), *aliud efficere X ſimile, & æquale*. Baſim AE transfer in MN: centris deinde M, N, intervallis AT, ET deſcribe arcus ſeſe interſecantes in V, duc

C 6 VM,

VM, VN habebitur Z æquale, & ſimile &c. (*Prop.* 18. *lib.* 1).

Probl. 6. *Lineam AL* (Fig. 86.) *metiri, cum datur acceſſus ad ſola puncta extrema L, A.* Ex puncto T ad libitum ſumpto obſerva angulum ATL, & conſtrue alium angulum æqualem LTN; Fac TN æqualem TA, erit quoque LN = LA: metire LN, habebis quæſitum. (*Prop.* 4. *lib.* 1).

Probl. 7. *Diſtantiam AL* (fig 87.) *omnino inacceſſam metiri.* Aſſume duo puncta NT, quorum diſtantiam exacte metiri liceat; e. g. 100. palmorum: ex punctis NT obſerva quantitatem 4 angulorum ANL, ATL, ANT, LTN. Deinde aſſumpta in charta alia linea NT 100 partium, fac angulos ANL &c. obſervatis æquales: quot partium invenies AL ſupra chartam, tot palmorum erit etiam in agro. (*Prop.* 4. *lib.* 6).

Probl. 8. *Metiri latitudinem Fluminis LA* (fig. 100). Aſſume in ripa LV 100 palmorum: obſerva quadrante angulos AVL, ALV. Fac ſimiles angulos in charta ſuper lineam 100 partium: & ex proportione habebis, ut ſupra lineam LA &c.

Eadem regula metitur quoque altitudo turris LA ex ſola obſervatione anguli T; nam alter angulus L rectus eſt (*fig.* 88).

Probl. 9. *Invenire centrum circuli, vel arcus ALN* (fig. 89). Aſſumptis duobus punctis L, N, deſcribe inde 4 arcus æquales ſeſe interſecantes in V, & X; aſſumptis pariter aliis punctis L, A, deſcribe 4 arcus ſeſe interſe-

can-

cantes in Z, T. Junge ZT, VX; harum ſectio O erit centrum circuli.

Eodem pacto ducitur circulus per tria data puncta

Probl. 10. *Datis tribus quadratis, quorum latera ſint A, N, L, (fig. 90) unum conſtruere omnibus æquale.* Unius quadrati latus L appone in HT, & alterius latus N junge perpendiculariter in EH: duc ET; erit hujus quadratum æquale duobus L, N. Tertium tandem latus A appone perpendiculariter in EF; facile conſtat quadratum FT æquale futurum tribus datis, (*Prop.* 47. *lib.* 1).

Probl. 11. *Datis duabus rectis AO, FO* (fig. 55) *invenire mediam proportionalem*. Binas AO, FO in directum poſitas biſſeca per prob. 3. Ex puncto ſectionis duc ſemicirculum per A, F: erige deinde perpendicularem OL; hæc erit media proportionalis quæſita. (*Propoſ.* 8. *lib.* 6).

Problem. 12. *Datis duabus rectis AO, OL* (fig. 55.) *tertiam proportionalem invenire*. Statue LO perpendiculariter in extremo alterius AO; hanc deinde protende verſus F: tum per bina puncta AL ducito circulum, cujus centrum ſit in recta AF: idem circulus determinabit OF tertiam proportionalem. (*Propoſ.* 8. *lib.* 6).

Probl. 13. *Dato circulo, cujus radius ſit OF* (fig. 55.) *invenire radium circuli triplam aream continentis*. Quoniam quæritur circulus triplus, fac OA triplam FO, & totam FA biſſeca; ac ex puncto biſſectionis duc ſemicirculum

lum ALF: erige deinde ex O perpendicularem OL: hæc erit radius circuli tripli. (*Propoſ. 2. lib. 12*).

Eodem modo inveniuntur latera cujuslibet figuræ e. g. quadrati, quadratum aliud datis vicibus continentis.

Probl. 14. *Invenire aream trapeſii, cujus duo anguli N, L, (fig. 91.) ſint recti*. Primò duc DF parallelam ad NL: deinde multiplica ND per NL, habebis aream NF (*prop.34. lib.1*). Ducta præterea DF per dimidium FA habebis aream DFA. Summa utriuſque areæ totum dabit trapeſium. Expeditius tamen eadem area habetur, ſi dimidium baſis NL multiplicetur per ſummam laterum ND, AL.

Probl. 15. *Metiri agrum irregularem ATLZ (fig. 92)*. Ducta libere AL, quæ agrum ſecet, erige ex eadem linea ope quadrantis perpendiculares ad ſingulos angulos figuræ SZ, HT, PF &c. Diviſa eo ipſo erit figura, vel in triangula rectangula, vel in trapeſia duobus angulis rectis conſtantia, quorum menſura ex probl. præced. dignoſcitur, omnium vero ſumma eſt quantitas agri. Diviſio vero agri poteſt quoque fieri aliis modis delineatis in fig. 98, 99.

Probl. 16. *Ex umbra baculi HN* (fig. 88) *& umbra turris LT dignoſcere hujus altitudinem.* Fac regulam auream; ut umbra baculi ad altitudinem baculi, ita umbra turris ad ejus altitudinem (*prop. 4. lib. 6*).

Probl. 17. *Obſervare altitudinem montis perpendicularem VL (fig. 97)*. Ex puncto N in pla-

planitie delecto obſerva quadrante angulum LNV: recede deinde verſus A per paſſus e.g. 100, & ex puncto A obſerva angulum LAV. Fac poſtea pares angulos in charta, ſuper lineam NA 100 partium; & ex puncto concurſus V duc VL perpendicularem; repræſentabit hæc montis altitudinem: quam ſi conferas cum partibus NA, dignoſces quot paſſus contineat montis elevatio (*vid. probl.* 19).

Lemma.

Circinus proportionis, aliis græce *Pantometra* eſt inſtrumentum communiſſimum in fig. 93 94 delineatum, quod vellem ut adoleſcens præ manibus reipſa teneret dum iſta legit. In ejus cruribus ex utraque facie plures inſcribuntur lineæ in centro axis concurrentes. Idea Geometrica hujus circini nihil aliud eſt, niſi plura triangula Iſoſcelia ſibi mutuo ſuperimpoſita, quorum omnium vertices ſint in unico puncto centri, baſes vero intelligantur extare inter æquales utriuſque lateris numeros 60, 60; 100, 100 &c. Lineæ principaliores ſunt, ea quæ inſcribitur *Partium æqualium*, & altera quæ inſcribitur *Chordarum*: prima a centro P procedit per æquales diviſiones uſque ad 100 aut 200 in utroque latere: ſecunda extat plerunque in facie adverſa oriturque a centro C, non per æquales diviſiones, ſed per diviſiones, quæ conveniunt magnitudini chordarum circuli, cujus radius ſit diſtantia centri a numero 60 in eadem linea notato, id eſt, ſi C

ſi C 60 ſit æqualis radio alicujus, circuli fiat C 90 par chordæ 90 graduum, C 30 chordæ 30 graduum &c. Hinc vero (*prop.4. lib.6*) ſi 60, 60 ſupponatur æquare intervallum radii in alio circulo, erunt 90, 90: & 30, 30, intervalla chordarum 90 & 30 graduum. Patet ergo fundamentum hujus inſtrumenti eſſe prop. 4. lib.6. Sed reliqua ad conſtructionem ſpectantia melius intelliguntur viva voce. Procedamus ad uſus aliquos.

Probl. 18. *Aſſumere alicujus lineæ AL* (figur. 95) *partes quaslibet e. g. duas decimas*. Elige in linea partium æqualium numerum continentem partes decimas e.g. 90, cujus pars decima eſt 9: aſſume circino intervallum lineæ AL, & aperto inſtrumento conſtitue hujuſmodi intervallum inter binos numeros 90, 90; pars lineæ quæſita erit AI intervallum inter 18, 18; nam numerus 18 continet binas decimas 90.

Eodem artificio dividitur linea in quaslibet partes æquales.

Probl. 19. *Data menſura unius lineæ in poligono e. g. data AL* (fig. 92) *palmorum* 90, *invenire menſuras omnium aliarum linearum*. Transfer intervallum AL in *partes æquales* 90, 90: tum vero aſſume ſucceſſive reliquas lineas, & obſerva hinc inde in lateribus inſtrumenti, quibus numeris correſpondeant, dabunt hi menſuras linearum. E. g. ſi AZ cohæreat numeris 20, 20, habebit AZ palmos 20.

Probl. 20. *Deſcribere in parva chartula agri topographiam, cujus omnes menſuræ innoteſcunt.*

Sit

Sit agri menſura longior paſſuum 90, & longitudo chartæ maxima AL (*fig.* 92): transfer AL ad *partes æquales* 90, 90; conſervatoque inſtrumento in eadem apertura, accipe circino ordinatim intervalla numerorum menſuris agri reſpondentium, & in chartam transfer, donec totam abſolvas figuram. E. g. accipe LN tot partium, quot paſſus in agro continet, deinde NM, tertio NO &c.

Methodo eadem figura quælibet ampliatur, vel reſtringitur proportionaliter.

Probl. 21. *Datis tribus lineis A, N, L* (fig. 58), *invenire quartam proportionalem*. Primam A transfer in aliquos ad libitum numeros e. g. in 80, 80; tunc accipe ſecundam N, & obſerva quibus numeris cohæreat, qui erunt e. g. 60, 60: deinde aſſume tertiam L & transfer in priores numeros 80, 80; intervallum inter 60, 60 æquabit quartam V.

Si datis duabus quæratur tertia; ſecunda, ut patet, bis accipienda.

Probl. 22. *Data linea AV* (fig. 96) *efficere ad A angulum* 30 *graduum*, Centro A quolibet intervallo deſcribe circulum, cujus radium AL transfer ad *lineam chordarum* ad 60, 60: tunc ſecandus eſt arcus LT intervallo numerorum 30, 30; ductaque TA, erit angulus TAL graduum 30.

Viciſſim, dato angulo, vel arcu LT, facile dignoſcitur quot gradus contineat: tranſlato nempe radio LA in 60, 60; & obſervando deinde quibus numeris cohæreat arcus LT.

Hinc

Hinc etiam patet qualiter ex dato circulo auferri debeat arcus datorum graduum.

Probl. 23. *De lineis, quæ inſcribuntur planorum & ſolidorum. Dato latere plani, vel ſolidi alicujus, invenire latus plani, vel ſolidi ſimilis, ſed e.g. tripli.* Latus datum ſtatue reſpective in lineis *planorum*, vel *ſolidorum* ſuper numerum aliquem e. g. 2, 2 : accipe deinde intervallum numeri tripli 6, 6 : hoc erit menſura pro plano, vel ſolido triplo.

Viciſſim: datis duobus planis, vel ſolidis ſimilibus, facile eorum ratio invenitur, ſi obſerventur numeri, quibus latera ſimilia cohærent.

Probl. 24. *Data aliqua ſphæræ menſura, e.g. data quantitate milliarium Geometricorum 60 pro gradu uno terreſtri, invenire reliquas terræ menſuras.* Problema hujuſmodi eſt in omni Geometria ingenioſiſſimum ob difficillimam demonſtrationem, quam in hoc opuſculo non dedimus; nam libro 12 actum non eſt niſi de reſpectiva Sphærarum proportione. Inventio debetur Archimedi, qui vocatur idcirco humani ingenii *Apex*. En ſolam praxim, in qua ſupponimus periphæriam circuli eſſe ad diametrum, ut 355 ad 113.

Quoniam gradus ſupponitur milliarium 60, & peripheria continet gradus 360, conficiet hæc milliaria 21 600. Fiat jam analogia 355 : 113 : : 21 600 : dabit hæc ex ſecundo in tertium, & diviſione per primum terminum milliaria in diametro 6 875 circiter, & in radio $3437\frac{1}{2}$. Deinde, quoniam ex Archi-

chimede radius ductus in ſemicircumferentiam dat circulum ſphæræ maximum; ducto hoc numero per 10 800, habebuntur in circulo maximo milliaria quadrata 37 125 000. Et quoniam ex eodem Archim. ſuperficies eſt quater circulus maximus, continebit hæc milliaria quadrata 148 500 000. Tandem, quia triens ſuperficiei in radium dat ſphæræ ſoliditatem, ut ex Archim. & ex Euclid. lib. 12. ſi triens antecedentis numeri, id eſt, 49 500 000 ducatur in $3437\frac{1}{2}$, obtinebitur tota telluris maſſa milliarium Geometricorum cubicorum 170 158 250 000.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ.

BREVIS EXPOSITIO.

CAPUT I.

DE NUMERIS INTEGRIS.

1. Ne in iis, quæ nimis ſunt clara, immoremur, cognita imprimis ſuppono ſequentia, magiſtri voce facillime explicanda.

2. Primus in quolibet numero locus ille eſt, qui extat ad dexteram legentis. Reliqui ſiniſtram verſus dicuntur ſecundus, tertius &c. Sic in numero 132 primum locum occupat littera 2, ſecundum littera 3, tertium 1.

3. Lo-

3. Locus primus eſt locus unitatum, ſecundus decadum, tertius centenariorum, quartus millium, quintus decadum millium, ſextus centenariorum millium, ſeptimus millionum &c. in ratione ſemper decupla. Sic numerus 2453 continet 3 unitates, 5 decades, 4 centena, 2 millia.

4. Hinc quælibet littera non ſolum ſignificat ratione ſui, ſed multo magis ratione loci.

5. Zerus ad id eſt inſtitutus, ut remittat numeros in locum alium, ſic in numero 200 bini zeri remittunt litteram 2 in tertium locum, in quo ſignificet bis centum; quæ ſi eſſet primo loco, ſignificaret ſolum duas unitates; ſi in ſecundo duas decades.

6. Numerus ordinate ſcribitur, cum ſingulæ litteræ ſtatuuntur in loco debito ipſarum valori.

7. Numeri per columnas ſcribuntur, cum unus ſub alio ita ponitur, ut omnes litteræ primi loci unam columnam efficiant; omnes ſecundi loci aliam &c. Hinc, ſi opus ſit ſcribere per columnas numeros ſequentes 1327, 405, 32, 200, fac, uti vides in A, ita, ut prima columna nunquam vacua relinquatur, quia numeri omnes habent aliquam notam primi loci. Modus iſte ſcribendi inſimul ſecundum ordines, & columnas attentiſſime addiſcatur; eſt enim maximi momenti.

A

```
1327
 405
  32
 200
```

8. Mentio deinde facienda horum ſignorum $+$, $-$, $\times$, $=$. Primum $+$ ſignificat ſummam, & legitur voce *plus*: $7 + 5$, ſumma

ex 7,

ex 7, & 5, ſeu 7 plus 5. Secundum — ſignificat ſubtractionem, & legitur *minus*, 7 — 5, id eſt, 7 demptis 5, ſeu 7 minus 5. Tertium × ſignificat *multiplicationem*; 7 × 5, id eſt 7 multiplicata per 5. Quartum = ſignificat *æquale*. En exemplum omnium ſimul 7 + 9 — 4 = 2 × 6, id eſt, 7 plus 9 minus 4 æquantur 2 ductis in 6. Sed de his iterum in Algebra.

Canones Additionis.

9. Additio eſt *quærere ſummam plurium numerorum*. Sint igitur numeri 312, 45, 630, quorum ſumma invenienda. Scribe primo in B numeros datos per columnas (*num.* 7) lineamque inferius ducito: tum quære valorem primæ columnæ dicendo, 2 + 5 efficiunt 7; ſcribe 7 infra lineam in eadem columna. Quære deinde valorem ſecundæ columnæ, in qua 1 + 4 + 3 efficiunt 8; ſcribe 8 infra lineam. In tertia tandem columna dicito 3 + 6 efficiunt 9; ſcribe 9. Dico ſummam eſſe 987. Ratio eſt; quia hic numerus tot continet unitates, decades, & centenaria, quot continentur tribus numeris ſuperioribus.

B
312
45
630
987

10. Si numerus infra lineam notandus in qualibet columna ſit major 9, ſcribe tantummodo primam ejus litteram a dexteris, reliquam vero, aut reliquas transfer in columnam ſequentem. Sit e. g. facienda additio C. In prima columna habetur 7 + 8 + 2 = 17, qui nume-

C
237
48
952
1237

numerus notatur litteris duabus; ſcripta ergo prima 7, ſecundam 1 transfero in alteram columnam, in qua $1 + 3 + 4 + 5 = 13$, numerum pariter duarum notarum: hujus itaque ſcribenda etiam ſola prima 3; altera 1 addatur columnæ tertiæ, fiatque $1 + 2 + 9 = 12$: ſcribam 2 in eadem columna, & litteram 1 notabo in loco columnæ quartæ. Sic erit ſumma integra 1237.

11. Examen additionis ſit, calculum denuo inſtituere ordine retrogrado, id eſt, ſi prima vice numerando deſcendiſti per 7, 8, 2, nunc aſcende per 2, 8, 7 &c. In fine vero, ſi eadem ſumma obtinebitur, ſignumerit errorem nullum a te commiſſum.

12. Aliqua exempla.

4950	101740	147
5050	270	45
10000	21909	312
	123919	200
		704

Canones ſubtractionis.

13. Scribe (*n.* 7.) per columnas numerum auferendum ſub eo, a quo auferri debet, & fac ſubtractionem ſingularum notarum, incipiendo a dextima. Sint auferendi 136, a 498; Scribe, ut vides, in A. Deinde, ducta linea, dicito in prima columna $8 - 6 = 2$; ſigna 2 ſub linea. Secundo dic $9 - 3 = 6$; ſcribe 6. Tandem $4 - 1 = 3$; ſcribe 3, eritque totum reſiduum 362.

A
498
136
362

14. Si

14. Si nota auferenda, ſit major nota ſuperiori, huic ſuperiori adde decadem; atque ut hujus decadis compenſatio fiat, nota verſus ſiniſtram vicinior mulctanda unitate. Sint exemplo 28 auferenda a 65. Cum dicere nequeam 5 — 8 addo decadem notæ 5, & dico 15 — 8 = 7. Deinde mulcto unitate notam 6, & dico 5 — 2 = 3, ſcribo 3: totum reſiduum erit 37. Idem intellige cum nota ſuperior eſt 0; per additionem enim decadis fieri poteſt 10.

65
28
37

15. Si nota mulctanda ſit 0, quæ proinde in ſe mulctari nequeat; eam mulcta virtualiter; id eſt, ad eam deveniens ipſi non addas integram decadem, ſed tantum 9: ſic dicendum in E 12 — 6 = 6; 9 — 2 = 7; 6 — 3 = 3.

E
702
326
376

16. Examen ſubtractionis eſt, ſi numerus ſubtrahendus additus reſiduo invento faciant ſummam æqualem numero ſuperiori.

17. Alia exempla.

30	48500	500	89049
19	402	300	30299
11	48098	200	49750

Canones multiplicationis.

18. Dum multiplicamus 12 per 2, patet fieri 24. Prior numerus 12 vocatur *multiplicandus*; ſecundus 2 vocatur *multiplicator*; uterque ſimul vocantur *factores*; tertius 24 dicitur *productum*, ſive *factum*. Numeros minores uſ-

que

que ad 9, qui unica nota ſcribuntur, voco ſimplices; reliquos duabus, vel pluribus notis conſtantes voco compoſitos.

19. Facta numerorum omnium ſimplicium inter ſe, tenenda ſunt memoriter; vel, ſi mavis e tabella communiſſima, quam vocant Pithagoricam, cum opus fuerit eruenda; aut etiam per digitos dignoſcenda. Factum cujuſlibet numeri per zerum ſemper eſt zerus ipſe.

20. Ubi vero de ſimplicium numerorum multiplicatione conſtat, facilis eſt progreſſus ad multiplicationem compoſitorum, quum ex ſimplicium multiplicatione repetita dependeat, uti exemplo patebit. Quæritur factum ex 723 in 48. Scribo 48 ſub 723, & ducta linea, dico $8 \times 3 = 24$; pono 4 ſub linea in columna notæ 8, & duas decades ſervo ſequenti facto addendas. Deinde dico $8 \times 2 = 16$, additiſque 2, ante retentis $= 18$: ſcribo 8, ſervata unitate; & dico ulterius $8 \times 7 = 56$, addito $1 = 57$, ſcribo totum 57; eſtque totum productum notæ 8 per $723 = 5784$. Eodem pacto multiplicando per 4, alteram litteram multiplicatoris, ſingulas notas 3, 2, 7, habebo productum 2892, quod ita ſcribendum eſt, ut dextima ejus nota 2 columnæ multiplicatoris 4 reſpondeat. Denique addendo hæc producta partialia, obtinebo factum totale 34704.

$$\begin{array}{r} 723 \\ 48 \\ \hline 5784 \\ 2892 \\ \hline 34704 \end{array}$$

21. Si inter notas multiplicatoris zerus occurrerit, poteris tuto hanc notam ommittere; dummodo producta aliarum litterarum ſcribe-

re

re incipias in propria cujuslibet columna, ut videri infra poteſt in primo exemplo.

22. Si zeri occurrant in fine *multiplicandi*, vel *multiplicatoris*, vel in utroque, poterunt hi etiam in operatione præteriri; dummodo poſtea in facto tot zeri apponantur, quot aderant ſimul in utroque factorum. Vide exempla II, III.

23. Examen multiplicationis ſit factores invertere; id eſt, ſi primo multiplicaſti 723 in 48, multiplica denuo 48 in 723, & ſi productum fuerit idem, recta dicetur operatio.

24. Alia exempla.

I	II	III
5470	87600	78500
308	79	5690
43760	7884	7065
16410	6132	4710
1684760	6920400	3925
		446665000

Canones diviſionis.

25. Dividere numerum quemlibet, per alium datum, eſt quærere, quoties hic in illo contineatur? Primus numerus vocatur *dividendus*, ſecundus *diviſor*, tertius *quotus*. Jam vero; ſi dividere velis 12 per 3, ſatis patet, 3 quater contineri in 12; adeoque 4 eſt quotus diviſionis. At ſi dividere oporteat 371 per 7, cum non illico appareat quotus, præfi-

```
  A       E
7)371(53
  35   B
  -------
   21  C
   21  D
  -------
   00
```

ge in A diviſorem 7 dividendo 371, linea interjecta; tum opus inſtituens in initialibus figuris dividendi, quæ ſunt proxime majores diviſore, nempe in 37, dic, quoties 7 in 37 continetur? Reſp. 5. Tum, ſcripto 5 ad dexteram dividendi in E, duc 5 in diviſorem 7, & productum 35 aufer a 37, & reſiduum 2 ſcribe in C. Huic adnecte ultimam dividendi notam, nempe 1, & fit 21, quæ proinde eſt altera pars dividendi, in qua opus inſtitues, ut prius; nimirum, quære quoties 7 continetur in 21? Reſp. 3; quare ſcripto 3 poſt 5 in E, aufer $3 \times 7 = 21$ ex dividendi parte 21; & quia reſiduum eſt 0, liquet 53 eſſe quotum numeri 371 diviſi per 7.

26. Operationis methodus generalis tres continet leges perpetuo ſervandas, & binas aliquoties tantum uſurpandas; quas in exemplo aliquo declarandas ſuſcipimus; interim, en ipſarum titulos. I. Quæratur quotiens, incipiendo a notis dividendi verſus ſiniſtram, in quibus primo contineri poteſt diviſor, quæ notæ ſunt prima dividendi pars. II. Figura inventa talis ſit, ut ejus productum per diviſorem auferri queat ab ea parte dividendi, de qua loquimur, nec relinquat reſiduum diviſore majus. III. Adjungatur reſiduo ſequens dividendi nota; & ab eodem ſic aucto eruatur ſimilibus conditionibus nova figura quotientis. IV. Si in reſiduo aucto non contineatur diviſor, ne ſemel quidem, ſcribatur o in quotien-

tiente, & alia littera dividendi applicetur.
V. Si operatione abſoluta, reſiduum ſuperfuerit, fiat in quoto fractio, cujus numerator ſit reſiduum, denominator vero ſit diviſor.

27. Sint 8214 dividendi per 27; ſcribe 27 in A, 8214 in B. Deinde (*per* I *legem*) dicito: quoties 27 continetur in 82? Jam patet eſſe 3; ſed non ſemper in numeris altioribus percipitur ſtatim, quoties unus alium ingreditur: idcirco, loquendo tantum de prima nota utriuſque numeri interroga, quoties 2 continetur in 8? Reſp. 4. Nunc (*per* II *legem*) fac $4 \times 27 = 108$, quod productum cum auferri non poſſit ab 82, ſignum eſt, figuram 4 eſſe nimis magnam: tentanda ergo nota 3, & faciendum $3 \times 27 = 81$, productum auferibile ab 82, cujus reſiduum 1 minus eſt diviſore 27. Itaque littera 3 ſcribenda in quoto C, & reſiduum 1 notandum in D.

A	B	C
27)	8214(	$304 \frac{6}{27}$
	81	
D	114	
	108	
E	6	

28. Nunc (*per* III *legem*) ſcribo in D poſt reſiduum 1 alteram notam 1 ex dividendo dimiſſam; & dico, uti prius; quoties 27 continetur in 11, ſeu quoties 2 continetur in 1? Reſp. o. Ergo (*per IV legem*) ſcribo o in quoto, & deſcendendo ſcribo etiam poſt 11 ultimam notam dividendi 4; iterumque dico, quoties 2 continetur in 11? Reſp. 5, ſed quoniam factum $5 \times 27 = 135$ auferri nequit a

 114,

114, nota 5 accurata minime eſt: quapropter tentanda nota 4, cujus factum $4 \times 27 = 108$, & reſiduum 6 conditiones ſecundæ legis adimplent. Scribo igitur litteram 4 in quoto C; & quoniam ſupereſt in E reſiduum 6, ex hoc,& diviſore efficio in eodem quoto (*per V legem*) fractionem, quam ibi vides. Sic demum abſoluta eſt diviſio; dividendo enim B per A, quotus eſt C, ſeu $304\frac{6}{27}$.

29. Examen diviſionis ſit multiplicare 304 per 27, & producto addere ultimum reſiduum 6; prodibit enim inde numerus prior 8214.

30. Alia exempla.

```
5)379(75 4/5        43)10105(235
  35                    86
  ──                    ──
   29                   150
   25                   129
   ──                   ───
    4                    215
                         215
                         ───
                         000
```

CAPUT II.

DE FRACTIONIBUS COMMUNIBUS.

31. QUantitas, quam fractam dicimus, proprie illa eſt, quæ integra in computando non ſumitur, ſed partialiter tantum; e. g. ſi *in* computu palmorum adducatur dimidium palmi, quæ fractio ſic ſcribitur $\frac{1}{2}$.

32. Duo

32. Duos igitur numeros in fractione conſpicis, linea interpoſita, nempe 1, & 2. Numerus 2 ſub linea vocatur *denominator*, & ſignificat palmum diviſum in partes duas, alter numerus 1 ſupra lineam vocatur *numerator*, indicatque ex his partibus, in quas palmus dividitur, unam ſolum accipi. Aliter: fractio $\frac{1}{2}$ eſt palmus unus diviſus per 2. Atque univerſim; fractio quævis ſignificat illud, quod reſultat ex numeratore diviſo per denominatorem. Sic fractiones $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{10}$ ſignificant 3 diviſa per 4, 2 per 5, 6 per 10, ſeu tres quartas unius, duas quintas, ſex decimas.

33. Cum fractio $\frac{1}{2}$ æquetur ſemipalmo, fractio $\frac{2}{4}$ æquabitur etiam ſemipalmo. Et generaliter loquendo, fractiones quæcunque, quarum numerator æqualiter continetur in denominatore, ut $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{2}$ ſunt inter ſe æquales.

34. Hinc, ſi fractionis uterque terminus per unum eundemque numerum multiplicetur, proveniet nova fractio priori æqualis, e. g. ſi terminos fractionis $\frac{3}{4}$ multiplices per 5; orietur fractio $\frac{15}{20}$, quam ideo dico priori æqualem, quia utriuſque numerator æqualiter continetur in denominatore. Viciſſim: ſi fractionis uterque terminus per eundem numerum dividatur, fractio inde orta, ob tandem rationem, priori æquabitur: e. g. ſi termini $\frac{15}{20}$ dividantur per 5, aliud generabunt fractum æquale, id eſt $\frac{3}{4}$.

35. Quando numerator, & denominator iidem ſunt, ut $\frac{2}{2}$, $\frac{4}{4}$, fractio æquatur unitati; quod quidem ex dictis patet. Cum vero numerator major eſt denominatore; fractio eſt major unitate, ut $\frac{5}{3}$, in caſu enim noſtro eſt dicere, diviſo in tres partes palmo accipiantur ex eis 5, id eſt totus palmus, & inſuper partes duæ.

36. Si unitas ſcribatur denominatoris loco, ſub numero aliquo, ut $\frac{5}{1}$, habebitur quidem expreſſio fractionis, ſed numeri valor nihil immutatur, ſignificat enim 5 diviſa per 1, ſeu 5 unitates.

37. Dum adeſt integer fractioni adnexus, ut $2\frac{3}{4}$, patet ex præcedentibus poſſe inde componi unicam fractionem, ſi uumerus 2 ducatur per denominatorem 4, fiatque $= 8$, & deinde addatur numeratori 3, ut habeatur fractio $\frac{11}{4}$. Viciſſim, fractio $\frac{11}{4}$ converti poteſt in $2\frac{3}{4}$ ex diviſione numeratoris per denominatorem.

Reductio plurium Fractionum ad communem denominatorem.

38. Eſt iſta in Fractis prima operatio; cum nempe, datis duobus e. g. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, quorum denominatores ſunt diverſi, quæruntur aliæ æquales expreſſiones ſub uno, eodemque denominatore. Multiplica terminos primæ fractionis 2, & 3 per denominatorem ſecundæ 5, habebis expreſſionem $\frac{10}{15}$, æqualem primæ (*n.*34).

(*num.* 34) . Multiplica deinde terminos ſecundæ fractionis per denominatorem primæ 3 ; habebis expreſſionem $\frac{12}{15}$ æqualem ſecundæ .

Si plures quam duæ fractiones reducendæ veniant, multiplica eodem pacto ſingulas per denominatores reliquarum . En praxim : ſint $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, ex prima fractione ducta per denominatores 4, & 6 provenit $\frac{48}{72}$, ex ſecunda ducta per denominatores 3, & 6 provenit $\frac{54}{72}$: ex tertia tandem ducta per 4 , & 3 oritur $\frac{60}{72}$. Ratio deſcendit ex num. 34 ; rem enim perpendenti conſtat , utrunque terminum fractionis per eundem numerum ubique duci .

Reductio ad terminos ſimpliciſſimos .

39. Fractio ad ſimpliciſſimam reducitur , cum per minimos numeros poſſibiles exponitur , ſervato ejus valore ; quod quidem fit , cum termini ambo dividuntur per numerum maximum , per quem ſimul dividi poſſunt . In fractione $\frac{60}{70}$ numerus maximus,per qnem dividi poſſunt termini, eſt 10 , ſimpliciſſime igitur expreſſa erit $\frac{6}{7}$. At ſi numerator major fuerit denominatore, ſimpliciſſime tunc exprimitur , ſi in integros reſolvatur (*num.* 37) .

Additio , & ſubtractio Fractionum .

40. Invenienda proponatur ſumma fractionum $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$: eas primo reduc ad communem de-

denominatorem $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$ (*num.* 38): adde deinde numeratores 10, & 12 erit ſumma $\frac{22}{15}$, ſeu $1\frac{7}{15}$ (*n.* 37). Subtractio fit ratione oppoſita, ſi peracta reductione, ſubtrahantur numeratores, patet enim $\frac{12}{15} - \frac{10}{15}$ eſſe $\frac{2}{15}$.

Multiplicatio Fractorum.

41. Cum duo numeri multiplicandi ſunt, quorum vel unus, vel uterque eſt fractus, reducatur primo integer, ſiquis adeſt, in formam fractionis (*num.* 36, 37): deinde fiat nova fractio, cujus numerator ſit productum ex numeratoribus, denominator productum ex denominatoribus. e.g. $\frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$: $7 \times \frac{2}{3}$, fac $\frac{7}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$, ideſt, $4\frac{2}{3}$ (*num.* 37.): $6 \times \frac{1}{2}$, fac $\frac{6}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Ratio operationis breviſſima patet in ultimo exemplo; nam 6×1 conſtat eſſe 6; ergo 6 per dimidium debet eſſe dimidium ipſius 6, ſive 3, prout obtinetur in exemplo.

Diviſio Fractionum.

42. Dimidium alicujus quantitatis diviſum per dimidium aliud conſtat facile habere pro quotiente unitatem; dimidium enim ſemel continetur in alio dimidio. Jam vero, ſcriptis fractionibus $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, ipſa unitas obtinetur, ſi numerator primæ fractionis ducatur per denominatorem ſecundæ, & viciſſim numerator ſe-

ſecundæ per denominatorem primæ, fiatque $\frac{8}{2}$. Idem obſervari licet in aliis exemplis. Hæc igitur ſit regula pro diviſione. Numerator dividendi multiplicatus per denominatorem diviſoris dabit novum numeratorem in quoto: viciſſim denominator dividendi ductus per numeratorem diviſoris dabit denominatorem novum. Si adſint integri; eos reduc ad fractionem. Exempla:

$$\frac{2}{3} \text{ per } \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{3}{5} \text{ per } \frac{4}{7} = \frac{21}{20} = 1\,\frac{1}{20}$$

$$2 \text{ per } \frac{3}{5}, \text{ fac } \frac{2}{1}\,\frac{3}{5} = \frac{10}{3} = 3\,\frac{1}{3}$$

CAPUT III.

DE FRACTIONIBUS DECIMALIBUS.

43. Fractiones decimales eæ ſunt, quarum denominator eſt 10, vel 100, vel 1000 &c. in ratione decupla. Hæ quidem tractari poſſunt methodo fractionum cæterarum; ſed admittunt etiam computationem in numeris integris uſitatam, atque hanc ob cauſam a recentioribus frequentiſſime uſurpantur.

44. Denominator 10 ad eam proprie ſpectat fractionem, quæ unicam habet notam in numeratore, denominator 100 ad illam, quæ duas notas continet; & in genere, tot ſunt zeri in denominatore, quot continet litteras numerator fractionis. Hinc in hujuſmodi fractis jam uſus obtinuit denominatores non ſcri-

bere; nam facillime agnoſcuntur ex numero litterarum numeratoris.

45. Sæpe igitur apud auctores in has, & ſimiles incides expreſſiones 27, 56 : 2, 335 : 4, 0092 : 0, 9 : quarum quamlibet in duas vides diſtinctam partes virgula interceptas. Numeri ante virgulam poſiti 27, 2, 4, 0, integros ſignificant; alii numeri poſt virgulam denotant fractiones decimales; poſſent autem ſcribi ſequenti modo $27\frac{56}{100}$: $2\frac{335}{1000}$: $4\frac{0092}{10000}$: $0\frac{9}{10}$. Nota in tertio exemplo fractionem continere partes decemmilleſimas, quæ ſignari non poterant binis tantum notis 92, ſi enim ſcriberemus 4, 92, fractio eſſet $4\frac{92}{100}$: appoſiti ſunt ergo zeri ante 92, ut ex notarum numero conſtaret denominatoris valor. Nota etiam in quarto exemplo loco integrorum apponi zerum; nullus enim ibi numerus eſt integer; hoc autem fit, ut conſtet reliquas notas poſt virgulam ad fractionem pertinere.

46. Binas expreſſiones 0, 9 : 0, 9000 æquales eſſe, conſtat facile ex num. 33. Hinc vero, ſi lubeat, poſſumus fractioni decimali adjungere quoſcunque zeros, quin ejus valor immutetur.

47. Quatuor computandi ſpecies in his fractionibus exerceri more integrorum jam innuimus; fiunt enim, tanquam nullæ ibi adeſſent decimales; ſed omnia forent unicus numerus: nam facile concipitur e. g. 2, 35 idem eſſe, ac $\frac{235}{100}$. Adductis ergo decimalium exemplis,

emplis, notabimus tantummodo, in quo ab integris diſcriminentur.

48. *Exempla additionis, & ſubtractionis.*

3, 502	45, 027
425, 0779	26, 99934
34, 72	*Different.* 18, 02766
Summa 463, 2999	

Tota ab integris diverſitas in eo ſtat, ut vides, quod virgularum columna immobilis ſervetur, atque ex ea verſus ſiniſtram ſcribantur per columnas numeri integri, verſus dexteram fractiones. In ſubtractione præterea ſupponitur fractio ſuperior aucta tot zeris, ſi opus ſit (*num.* 46), quot requiruntur, ut fractio inferior ſubtrahi queat.

49. *Exemplum multiplicationis.*

```
 2,36
  4,7
 1652
 944
11,092
```

Hoc ſolum attende, ut ſepares in producto pro fractione tot figuras, quot continent ſimul uterque factorum.

50. Diviſio patet ex oppoſitione ipſius cum multiplicatione; ſi namque in ſuperiori exemplo dividamus 11, 092 per 2, 36, quotus prodibit 4, 7: id autem obtinetur, ſi nulla fiat mentio diſtinctionis fractionum, niſi in

quoto, in eo nempe tribuendo tot notas fractioni, quo plures eæ ſunt in dividendo, quam in diviſore. Quodſi in dividendo plures notæ non adſint, ſcribe poſt eundem zeros, quot volueris; ſic enim & figurarum numerus evadet major, & regula diviſionis fiet univerſalis.

ALGEBRÆ FINITORUM PRINCIPIA SELECTA.

CAPUT I.

POSTULATA PRINCIPALIORA, QUÆ SUNT TOTIUS ALGEBRÆ QUASI IDIOMA.

51. Quantitates quælibet cognitæ repræſententur primis alphabeti litteris *a*, *b*, *c* &c.

52. Quantitates incognitæ repræſententur ultimis litteris *y*, *z*, *x*.

53. Summa duarum quantitatum ſignificetur ſigno + (*Vid. num.* 8).

54. Subtractio unius quantitatis ab alia, ſive earum differentia ſignificetur ſigno — (*vid. num.* 8).

55. Quantitas quælibet affecta ſigno +, vel —, vocetur *terminus*.

56. Termini dicantur *ſimiles*, ſi eiſdem conſtent litteris.

57. Quantitas unico termino expreſſa vocetur

cetur *monomium*, ut $- a$: etiam ſi pluribus conſtet litteris, ut $+ abc$. Quæ duplici termino exprimitur, dicatur *binomium*, ut $- a + b$; quæ triplici, *trinomium*, ut $+ a + bc + abd$.

58. Multiplicatio facienda notetur ſigno $\times$ (*num.* 8). Si tamen duo, aut plures termini occurrant multiplicandi, eos lineola ſuprapoſita liceat diſtinguere, vel parentheſi claudere e. g. $\overline{a + c} \times \overline{d - e}$, $(a + c) \times (d - e)$.

59. Multiplicatio inter litteras facta nullo ſigno notetur; hinc dum ſcribitur ab, intelligatur a eſſe multiplicatum per b.

60. Diviſio ſcribatur inſtar fractionis: e. g. $\frac{a}{b}$ ſignificet a diviſum per b; ſive quotiens inter a, & b. Si plures termini ſint dividendi eodem pacto fiat, ut $\frac{ab + d}{c}$, $\frac{a + b}{d - e}$.

61. Æqualitas inter quantitates quaslibet notetur ſigno $=$, ſic $a = b$ ſignificet a, & b æquari. Eodem pacto majoritas notetur ſigno $>$; minoritas vero ſigno $<$.

62. Infinitum notetur ſigno ∞, e. g. $a\,\infty$ ſignificet a multiplicatum per infinitum.

63. Signum $\surd$ ſit ſignum radicale; de quo poſtea (*num.* 159).

64. Quantitas poſitiva dicatur ea, quæ nihilo, ſeu zero major eſt, & notetur ſigno additionis $+$, vel etiam nullo ſigno, cum initio expreſſionis occurrit. Porro nihilo major eſt ea quantitas e. g. pecunia mercatoris, cum ipſe aliquid poſſidet, & nihil debet.

65. Quantitas negativa dicatur ea, quæ nihilo

hilo minor eſt: notetur autem ubique ſigno ſubtractionis —. Nihilo autem minor eſt quantitas e.g. pecunia mercatoris, cum ipſe nihil poſſidet, & aliquid debet.

66. Cum quantitas eadem eodem ſigno notata pluries occurrit, ut $a + a + a + a$, brevius exprimi poteſt, ſi ſemel ſcribatur, ipſique præfigatur numerus indicans quoties aſſumitur: ſic ex quantitate modo dicta fit $+ 4a$. Alia exempla ſint $ab + ab = 2ab$; $ab + ab - ac + ab - ac = 3ab - 2ac$. Numerus autem præfixus dicatur *coefficiens*.

67. Littera nullum habens præfixum numerum intelligatur habere pro coefficiente unitatem; $a + b = 1a + 1b$. Immo, poteſt etiam una littera concipi tanquam coefficiens alterius: ſic in termino ab erit a coefficiens litteræ b.

68. Cum quantitas eadem per ſemetipſam pluries multiplicata occurrit, brevius exprimitur, ſi ſemel ſcribatur, notando poſt ipſam, aliquanto altius, numerum indicantem quoties multiplicatur. Sic $aa = a^2$; $aaaa = a^4$; $aab = a^2b$. Numerus hac lege ſcriptus dicitur *exponens*: Sic vero legitur a ſecundum, a tertium, a quartum &c.

69. Littera nullo notata exponente intelligatur habere pro exponente unitatem; $a = a^1$; $ab = a^1b^1$. *Bene hic animadvertenda differentia inter coefficientem, atque exponentem*. Si enim ſit $a = 3$; erunt $2a = 6$, $a^2 = 9$.

70. Expreſſio, in qua intervenit ſignum $=$ vocetur *æquatio*. Partes vero, quæ ſunt ante, & poſt

& poſt ſignum, dicantur *membra*. Sic in æquatione $a + b = c - d$ primum membrum eſt $a + b$, ſecundum $c - d$. Hinc patet unum membrum pluribus terminis conſtare poſſe.

71. Quantitas *ſimplex* ſit ea, quæ unica littera exprimitur: *complexa*, quæ pluribus. Litteræ vero ubique ſcribantur, quantum fieri poteſt, ordine alphabeti.

Initio ſtatim ſtudioſos juvenes admonendos cenſemus, ne Algebram, ut in aliis ſit ſcientiis, oculo tantummodo perlegant, aut meditentur; ſed potius quæcunque dixerimus, ſcripto quamprimum comprobent, ac examinent diligenter: eſt enim algebra, ſcientia praxim amans, atque, ut ita dicam, ſcientia calami.

CAPUT II.

DE PRIMIS ALGEBRÆ OPERATIONIBUS.

72. PRimæ in algebra operationes ſunt 5; reductio ad faciliorem expreſſionem, additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio; quæ quidem locum habent tam in integris, quam in fractis.

De Reductione Integrorum.

73. Hæc operatio locum habet tantummodo in terminis ſimilibus. Quando igitur hi occurrunt, vel ſunt ſub eodem ſigno, vel ſub di-

diverſo; ſi ſub eodem, facienda eſt coeffi-
cientium additio, & reliqua prout ſunt ſcribenda: $2a + 3a = 5a$; $- ab - 3ab = - 4ab$; $a^2 + a^2 = 2a^2$. Si vero extent ſigna diverſa: vel coefficientes ſunt æquales, & uterque terminus deleatur; $a - a = 0$, $3a^2b - 3a^2b = 0$: vel ſunt inæquales, & minor a majori ſubtrahatur, ſcribendo reſiduum ſub ſigno majoris, $2a - a = a$; $3a^2 - 6a^2 = - 3a^2$.

De Additione Integrorum.

74. Additio fit ſcribendo terminos unum poſt alium, ſignis nihil immutatis. Sic ſumma ex $a + b$, & $c - d$ eſt $a + b + c - d$. Facienda tamen eſt reductio, quoties termini ſimiles apparuerint: ſed ut hæc reductio commode obtineatur, optimum eſt conſilium terminos ſimiles unum ſub alio perpetuo ſcribere. En exemplum: ſint addenda $3a^2 + abd - ac + ax$, atque $- 3a^2 + 3ac + ax$.

Scribe	$3a^2 + abd - ac + ax$
	$- 3a^2 \quad\quad + 3ac + ax$
Erit ſumma	$+ abd + 2ac + 2ax$

De Subtractione Integrorum.

75. Hæc fit unica lex. *Signa ſubtrahendi muta in contraria, & fac additionem, ut ſupra.* Sit ſubtrahendum $a - b$ ex $c + d$; erit reſiduum $c + d - a + b$, mutatis nempe ſignis quan-

quantitatis $a - b$. Operatio clara evadet, ſi fiat in numeris aliqua ſubtractio eadem lege: e. g. ſit ſubtrahendum $5 - 2$ ex $4 + 6$: conſtat jam reſiduum debere eſſe 7: idem autem numerus habetur, ſi fiat $4 + 6 - 5 + 2 = 7$. Ratio autem breviſſima eſt, quia ſubtractio eſt contraria additioni, & tota additionis operatio in ſignis conſiſtit: Si igitur additio ſit ſignis conſervatis, ſubtractio fieri debet, iis mutatis.

De Multiplicatione Integrorum.

76. Quantitas multiplicanda continere poteſt litteras, ſigna, coefficientes, & exponentes: quatuor ergo regulis expedienda multiplicatio.

77. Regula litterarum eſt, quod una poſt aliam ſcribatur, nullo ſigno intermedio (*numer.* 59). Sic $a \times b = ab$; $ab \times c = abc$.

78. Regula ſignorum eſt, quod eadem ſigna efficiant $+$, contraria $-$, e. g. $a \times b + c = ab + ac$; $-a, \times b - c = -ab + ac$; $a - b \times c = ac - bc$. Ratio hujus regulæ ſic poteſt exponi. Primo, quod $+a$ per $+b$ efficiat $+ab$, nullam involvit difficultatem. Clarum pariter eſt, quod $-a$ per $+b$ efficiat $-ab$, eſt enim $-a$ toties ſumptum, quot ſunt unitates in b. Quod vero ſigna bina negativa $-$, $-$ efficiant poſitivum $+$, ſic oſtendo, adhibendo numeros brevitatis cauſa: ſit $7 - 3$ multiplicandum per -2: conſtat jam $7 - 3$ eſſe 4, productumque fore -8; ſi ergo multiplicem

7 per

7 per — 2 , fiet — 14 , quantitas nimis parva , cui addere debeo + 6 ad habendum — 8, id eſt , erit productum — 14 + 6 : porro hic numerus + 6 haberi non poteſt , niſi ex multiplicatione — 2 per — 3 ; ſigna igitur — , — efficiunt + .

79. Cum multiplicatio per diviſionem deſtruatur , non eſt hic ommittendum , eodem etiam pacto in diviſione ſigna ſimilia efficere + , contraria — : nam — 14 + 6 diviſa per — 2 efficere debent + 7 — 3 .

80. Regula coefficientium eſt , quod unus per alium multiplicetur e. g. $3a \times 2b = 6ab$: ratio eſt , quia multiplicare $3a$ per $2b$ eſt dicere , ter aſſumatur a ductum per $2b$, id eſt , fiat $2ab + 2ab + 2ab = 6ab$.

81. Regula exponentium eſt , quod ſi adſint ſupra eaſdem litteras addantur , ſi ſupra diverſas , nihil immutentur , $a^2 \times a^3 = a^5$. Ratio eſt , quia $a^2 = aa$ (num.68) , $a^3 = aaa$: jam vero $aa \times aaa = aaaaa = a^5$.

82. Quando multiplicanda ſunt polinomia , commodum eſt ea ſcribere ſecundum formam in Arithmeticis uſitatam , uti obſervari poteſt in ſequentibus exemplis : in quibus prӕterea omnes modo traditӕ regulӕ exercentur .

Multipl. $3a^2 - ab^2x + 2c$
Multipl. $2a - x$

Product. $6a^3 - 2a^2b^2x + 4ac - 3a^2x + ab^2x^2 - 2cx$

Aliud

Aliud exempl. $ab + ac$

$$\begin{array}{l} ab + ac \\ ab - ac \\ \hline a^2b^2 + a^2bc \\ \quad\quad - a^2bc - a^2c^2 \\ \hline \end{array}$$

Product.ſumm. $a^2b^2 \quad - a^2c^2$

De Fractorum uſu.

83. Monuimus (*n.* 60.) diviſionem Algebraicam indicari fractionum forma; agendum ergo nunc videtur de fractis, antequam de diviſione aliqua ulterius proferamus. Horum vero operationes ſunt additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio, reductio ad eundem denominatorem, & reductio ad ſimpliciorem formam.

84. Additio & ſubtractio fiant eiſdem regulis integrorum (*num.* 74, 75); ſcribendo nempe terminos, unum poſt alium, ſignis conſervatis in additione, mutatis in ſubtractione. Hoc pacto fractionum $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ſumma eſt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, differentia vero $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$.

85 In multiplicatione, & diviſione conſideranda ſunt ſigna, & termini. Signum ante fractionem, ſi quidem fuerit unicum, & poſitivum, intelligetur afficere tam numeratorem, quam denominatorem; ut $+\frac{a}{b} = \frac{+a}{+b}$. Si vero fuerit negativum, afficiet unum

num tantummodo, quem malis; ſic $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$, vel $\frac{a}{-b}$.

86. Ratio horum eſt, quia fractio eſt diviſio indicata (*num.* 60), in qua (*num.* 79) eadem ſigna efficiunt $+$, contraria $-$; conſtat autem quotientem in primo caſu debere eſſe poſitivum, in ſecundo negativum, ſignum ergo $+$ ante fractionem tale eſt, ut efficiat in quotiente $+$; ſignum vero $-$ tale ut efficiat $-$: hinc prius ſignum afficit utranque partem, ſecundum alterutram, quam malis.

87. Fractio duplicis ſigni negativi, utcunque poſiti æquivalet fractioni poſitivæ $-\frac{a}{-b}$, vel $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$; eadem enim ſigna efficiunt $+$ (*num.* 79).

88. Multiplicatio itaque fractorum habetur, ut in arithmeticis (*num.* 41); ſi fiat productum numeratoris utriuſque, & utriuſque denominatoris; attentis tantummodo lege ſignorum, & reductione, de qua mox: ſic $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb}$; $\frac{a}{-c} \times \frac{ac}{b} = \frac{aac}{-cb}$.

89. Diviſio fit pariter, ut in arithmeticis (*num.* 42), multiplicando decuſſatim numeratores, & denominatores; e.g. $\frac{a}{b}$ diviſum per $\frac{c}{d}$ dat $\frac{ad}{bc}$. Tantummodo hic notandum fractiones, eas maxime, quæ conſtant denominatoribus numericis, ut $\frac{a}{2}$, $\frac{6}{1}$ ſcribi ſæpiſſi-

piſſime ſequenti modo $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}b$, appoſita nempe fractione coefficientis loco, ac ſi dicamus *dimidium a*, *tertia pars b*.

90. Reductio ad communem denominatorem nihil etiam differt ab arithmetica, fit enim per multiplicationem directam denominatorum, & decuſſatam numeratorum (*n.* 38).

91. Reductio ad faciliorem expreſſionem fit primo, cum pluries adeſt idem denominator; quo quidem caſu poſſunt omnes fractiones ad unicam reduci ſub eodem-met denominatore, conjunctis tantum numeratoribus; e.g. $\frac{a}{b}+\frac{2c}{b}-\frac{cd}{b}$ reductæ ſunt $\frac{a+2c-cd}{b}$.
Secundo fit reductio per regulas mox adducendas in diviſione integrorum.

92. Pro computandis integris ſimul cum fractis, hæc regula ſit ſufficiens. Integer conſideretur inſtar fracti, ſcribendo ſub ipſo unitatem: eſt enim evidens (*num.* 36) eſſe $a=\frac{a}{1}$. Jamvero, integro ſic conſiderato, operationes fiant juxta modo dicta. Adſunt tamen aliquæ formæ compendioſiores, quas ipſo uſu declarabimus.

De diviſione Integrorum.

93. Scribe diviſorem ſub dividendo, fractionis inſtar, prout jam poſtulavimus (*n.* 60); tunc autem ſequentes attende regulas.

94. I. Si eadem littera appareat in omnibus

bus omnino terminis fractionis, deleatur ubique, relicta tamen unitate, ejus loco, ſi in aliquo numeratore extet ſolitaria: e. g. $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$; $\frac{b}{bc} = \frac{1}{c}$; $\frac{abb - bd}{bc} = \frac{ab-d}{c}$; $\frac{ac + a}{ab} = \frac{c+1}{b}$. Ratio eſt, quia termini ſunt per eandem litteram multiplicati; per eam igitur, ſervata fractione, poſſunt omnes dividi, litteram delendo.

95. III. Si adſint coefficientes, qui inter ſe dividi poſſint, dividatur major per minorem, & quotiens ponatur loco majoris $\frac{6a}{2b} = \frac{3a}{b}$, $\frac{3x}{-9a} = \frac{x}{-3a}$. Ratio patet ex ſuperiori: nam coefficientes ſunt partes expreſſionis multiplicantes litteras, quibus adjunguntur.

96. III. Si adſint exponentes, qui quidem ſint ſuper eaſdem litteras, ſubtrahatur minor a majori, & reſiduum ſcribatur loco majoris $\frac{a^5}{a^3b} = \frac{a^2}{b}$. Ratio eſt eadem, nam $\frac{a^5}{a^3b} = \frac{aaaaa}{aaab}$, ideſt $\frac{aa}{b}$ (*num.* 94).

97. IIII. Signa eadem efficiunt $+$, contraria $-$ (*num.* 79):

98 V. Tandem; ut commode diviſio perficiatur, diſponendi ſunt termini, tam in dividendo, quam in diviſore, ſecundum aliquam

quam litteram utrique communem, ita ut in primo termino ſit ea littera ſub maximo, quem habet exponente; in ſecundo, ſub exponente proxime minori, & ſic deinceps. Deinde juxta præfatas modo regulas, inveniatur quotiens priorum terminorum: hic multiplicetur per totum diviſorem, productumque a dividendo ſubtrahatur; prout in numeris faciendum diximus (*num.* 26). Eadem poſtea operatio circa reſiduum inſtituatur, donec vel deveniatur ad reſiduum $= 0$, vel ad ſeriem quandam poſtea exponendam. Exemplis omnia illuſtrabimus.

99. Sit dividendum $ab + bx + aa + ax$, diviſor $b + a$.

Dividendum ordinatum erit

	$aa + ab + ax + bx$	Quotiens
Diviſor	$a + b$	$a + x$
Product.	$aa + ab$	
Reſiduum	$ax + bx$	
Diviſor	$a + b$	
Productum	$ax + bx$	
Reſiduum	$0 \quad 0$	

Operatio ſic inſtituta eſt. Primus terminus aa dividendi ordinati diviſus per primum a diviſoris dedit in quotiente $+ a$ (*num.* 94), qui terminus multiplicatus per totum diviſorem genuit productum $aa + ab$ (*num.* 77); factaque ſubtractione hujus producti a dividendo, ſuperfuit infra lineam reſiduum $ax + bx$. Denuo

nuo ſub hoc reſiduo ſcriptus eſt diviſor, & habitus ex prioribus terminis quotiens $+ x$, ex quo productum $ax + bx$, & reſiduum $= 0$: quotiens ergo diviſionis eſt $a + x$.

100. Aliud exemplum continens mutationem ſignorum, & fractionem in quotiente.

Dividendum	$ab - c$	$b - \frac{c}{a}$ quotiens
Diviſor	a	
Productum	ab	
Reſiduum	$- c$	
Diviſor	a	
Product. (n. 92)	$\frac{-ac}{a} = -c$ (n. 94)	
Reſiduum	0	

101. Exemplum tertium quotientis non exacti, ſed expreſſi per ſeriem infinitam:

Divi-

Dividend.	$a^2+2ax+x$	$a+x-\frac{x^2}{a}+\frac{x^3}{a^2}-\frac{x^4}{a^3}$ &c.
Diviſor	$a+x$	
Productum	a^2+ax	
Reſiduum	$ax+x$	
Diviſor	$a+x$	
Productum	$ax+x^2$	
Reſiduum	$-x^2+x$	
Diviſor	$a+x$	
Productum	$-x^2-\frac{x^3}{a}$	
Reſiduum	$\frac{x^3}{a}+x$	
Diviſor	$a+x$	
Productum	$\frac{x^3}{a}+\frac{x^4}{a^2}$	
Reſiduum	$-\frac{x^4}{a^2}+x$ &c.	

102. Procedentes in diviſione hujus exempli devenimus ad ſecundum reſiduum $-xx+x$, cujus primus terminus per primum diviſoris dividi non potuit: ſcripſimus igitur in quotiente fractionem ſigno $-$, ex qua, & ex diviſore prodiit, facta reductione, productum $-xx-\frac{x^3}{a}$, & reſiduum $+\frac{x^3}{a}+x$. Huic reſiduo applicato diviſore, habuimus ſecundam fractionem quotientis $\frac{x^3}{a^2}$ ſigno $+$.

Eodem deinde pacto invenimus tertiam fractionem ſigno —: & ſic ulterius, mutatis ſemper alternatim ſignis, habere potuimus alios, atque alios, terminos ſeriei in quotiente. Jam vero, ſi ſeriem conſideres ſtatim apparet; primo, numeratores eſſe ſemper x, ſub exponentibus 2, 3, 4 &c. æqualibus intervallis Arithmetice creſcentibus. Secundo denominatores eſſe ſemper a ſub exponentibus 1, 2, 3 ſimiliter creſcentibus. Tertio ſigna +, —, alternatim continuo mutari. Igitur, in qualibet diviſione non exacta, habitis prioribus duobus terminis ſeriei, facile eſt illam ulterius proſequi, continuando nempe terminos, mutando ſigna, & augendo æqualiter exponentes.

Quid ſint Radices? quid Potentiæ? & quomodo hæ ex illis oriantur?

103. Potentia in præſenti vocatur quælibet quantitas conſiderata tanquam factum alterius per unitatem, vel per ſemetipſam, ſenſu mox explicando. Quæ producit, vocatur *Radix*, quæ producitur *Potentia*: e. g. dum a multiplicatur per a, radix eſt a, potentia eſt aa.

104. Cum radix quælibet multiplicari poſſit, primo per unitatem, deinde per ſemetipſam bis, ter, quater &c. patet diverſos fore potentiarum gradus, nempe a, aa, aaa &c. Potentia primi gradus eſt ipſa radix a, ſecundi gradus eſt aa, quæ vocatur quadratum, tertii gradus eſt aaa, quæ dicitur *cubus*, & ſic de aliis gradibus. Ipſa vero radix,

dix, prout refertur ad diverſas potentias, dicitur radix quadratica, cubica, ſeu ſecunda, tertia, quarta &c.

105. Series potentiarum cujuſvis radicis eſt ſeries Geometrica; quilibet enim terminus eſt medius proportionalis inter duos hinc inde æquidiſtantes, ita enim eſt $a : aa :: aa : aaa$, cum idem productum $aaaa$, a mediis proveniat, atque ab extremis. Poteſt vero ſeries, ſi lubeat, incipere ab unitate, fierique $1, a, aa, aaa$ &c. adhuc enim in eo caſu conſervatur proportio, ut conſideranti patet.

106. Præterea eadem ſeries ex dictis (*numer.* 68) ſcribi ſic poteſt $1, a^1, a^2, a^3$ &c. creſcentibus quidem exponentibus Arithmetice, dum termini augentur Geometrice.

107. Sit jam elevanda aliqua littera ad aliquam poteſtatem, e. g. b ad tertiam, patet ſcribendum eſſe bbb, vel b^3. Eodem pacto mononium plurium litterarum abc ad tertiam potentiam elevatum erit $a^3b^3c^3$, ſive $\overline{abc}^3$, vel $abcabcabc$.

108. Si radix polinomia $a + b$ elevari debeat ad ſecundam potentiam, aliquando ſatis eſt ſcribere $\overline{a + b}^2$, linea ſupraducta cum exponente. Plerunque tamen fieri ſolet integra multiplicatio juxta regulas (a *n.* 76, quo quidem pacto quadratum binomii $a + b$ invenitur $aa + 2ab + bb$: cubus vero $aaa + 3aab + 3abb + bbb$, ut experienti palam fiet.

109. Tandem, ſi fractio ſimplex $\frac{a}{b}$ eleva-

ri debeat ad quadratum, conſtat ex num. 88 ſcribendum eſſe $\frac{aa}{bb}$; ſi ad cubum, ſcribendum eſt $\frac{aaa}{bbb}$. Eiſdem legibus $\frac{a-1}{3}$ elevata ad quadratum eſt $\frac{aa-2a+1}{9}$.

CAPUT III.

DISPOSITIONES GENERALES AD PROBLEMATA.

110. PRoblema in re præſenti eſt ex aliquibus quantitatibus cognitis alias incognitas deducere, ope alicujus habitudinis inter has, & illas, quæ habitudo appellari ſolet conditio.

111. Problema aliud eſt *determinatum*, aliud *indeterminatum*. Primum eſt illud, in quo ex datis conditionibus inveniri poſſunt omnes quantitates incognitæ, & in quo, tot ſunt conditiones, quot incognitæ. Secundum eſt illud, in quo aliquid horum deeſt. Exempla problematum determinatorum poſtea dabimus. Exemplum problematis indeterminati ſit, *quærere duos numeros hac conditione, quod eorum ſumma ſit* 20. Cui multipliciter, uti patet, poteſt reſponderi, quin una præ alia reſponſione ex unica propoſita conditione colligatur.

112. In geometricis ſit exemplo: *Ab extremitatibus diametri A, C* (fig. 114) *ducere ad*

ad punctum aliquod peripharia binas rectas, quæ ibi efficiant angulum rectum. Cui problemati ex prop. 31. lib. 3. Euclid. reſpondetur, habere tot ſolutiones, quod ſunt puncta in peripharia ABC: ob idipſum vero nihil determinatum proponitur in quæſtione.

113. Dato igitur problemate, accurate perſcrutandum, quænam ſint in eo quantitates cognitæ, quænam incognitæ: cognitæ primis litteris a, b, c ſignificentur; incognitæ ultimis y, x, uti jam diximus. Tum conditiones problematis obſervandæ, & litteris ipſis diligenter, ac indiſpenſabiliter exprimendæ.

114. Conditio expreſſa, vel erit analogia aliqua litteralis, vel æquatio: ſi analogia, tranſmutetur in æquationem, multiplicatis mediis, & extremis, in omni enim analogia factum extremorum æquatur facto mediorum (*prop.* 16. *lib.* 6. *Euclid.*): e. g. hæc analogia $a + b : x :: d : c$ ſic mutabitur in æquationem $ac + bc = dx$.

115. Habita æquatione, laborandum deinde eſt in detegendo valore quantitatis incognitæ, ipſam liberando ab omnibus aliis quantitatibus quibuſcum connectitur: liberari autem poteſt 5 modis: per *tranſpoſitionem*, *multiplicationem*, *diviſionem*, *ſubſtitutionem*, *&* *extractionem radicum*. Ultimo interim omniſſo, reliquorum explicabimus uſum.

Tranſpoſitionis uſus.

116. Liberatur, incognita per tranſpoſitionem, quando cum aliis quantitatibus conecti-

nectitur per additionem, vel ſubtractionem; tranſponendo nempe quantitates illas in alteram æquationis partem, mutatis ſignis: e. g. in æquatione $x + a = c$ valor x ideo ignoratur, quia per additionem connectitur cum a: fiat ergo $x = c - a$, id eſt; tranſponatur a ex altera parte contrario ſigno, & habebitur valor x quæſitus; eſt enim evidens, quod ſi fieret $x + a - a = c - a$, adhuc permaneret æquatio, & reducendo (n. 73) $x = c - a$. Similiter in æquatione $x - b = a$, in qua x connectitur cum $- b$ per ſubtractionem, fit tranſponendo, $x = a + b$; eſt enim $x - b + b = a + b$, addito utrinque $+ b$: id eſt $x = a + b$.

117. Hæc autem regula in tranſpoſitione plerumque ſervanda, quod incognita aut permaneat, aut fiat poſitiva; generaliter enim loquendo, ſemper licet terminos quoslibet tranſmutare ex negativis in poſitivos, & viciſſim, illos transferendo in alterum æquationis membrum. Immo poteſt omnis æquatio reduci ad o, tranſpoſitis terminis omnibus unius membri: ſic $x + a = c - d$ fieri poteſt $x + a - c + d = o$.

Uſus Diviſionis.

118. Diviſione liberatur incognita, quando eſt cum aliis quantitatibus multiplicata, ut $ax = bc$; fiat enim, dividendo terminos omnes per a, $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$, ſeu brevius $x = \frac{bc}{a}$. Alia exempla: $5x + bx = ab$ fiat $x = \frac{ab}{5+b}$; $x + ax = bc$, fiat

fiat $x = \frac{bc}{1+a}$. In hoc ultimo exemplo diligenter animadverte, qualiter unitas ingrediatur denominatorem diviſionis; erat enim in data æquatione x multiplicata per $1 + a$.

Uſus Multiplicationis.

119. Hujus ope liberatur incognita ab iis quantitatibus, quibuſcum per diviſionem implicabatur. In æquatione $a = \frac{x}{b}$ adeſt x diviſa per b: multiplicando igitur omnes terminos per b, fiat $ab = \frac{bx}{b}$, ſeu brevius $ab = x$.

120. Aliquoties opus eſt aſſumere non unam, ſed plures ex prædictis operationibus: e. g. in æquatione $x + \frac{x}{b} = ab$, fiat multiplicando, $bx + x = abb$; cum tamen hoc minime ſufficiat, fiat deinde dividendo (*n.* 118), $x = \frac{abb}{b+1}$.

Uſus Subſtitutionis.

121. Subſtitutio tunc uſurpatur, cum duæ, aut plures incognitæ problematis ſolutionem ingrediuntur, ita ut una aliam implicet; neceſſe eſt enim, ut unica relicta, equivalens aliarum ſuppleat ipſarum vicem. Pone igitur, te in aliquo problemate duplicis incognitæ incurriſſe in has duas æquationes $x + y = c$, $2a + y = b + x$, eruere non poteris incognitarum

valorem, niſi ſequente aut ſimili modo procedas. In prima æquatione fac transponendo $x = c - y$; hanc deinde quantitatem $c - y$ Subſtitue in ſecunda loco x; fietque $2a + y = b + c - y$. En habes æquationem unius incognitæ, in qua facile eruitur valor y, ſi fiat tranſponendo, $2y = b + c - 2a$, & dividendo, $y = \frac{b + c - 2a}{2}$. Nunc inventa y, cognoſcitur etiam x ex æquatione $x = c - y$; quod quidem per ſe patet. Præ oculis in ſubſtitutione ſemper habe, ut ſigna apponas, non temere, ſed talia, ut quantitas ſupplens litteræ ſupplendæ equivaleat; pro quo analyſtæ induſtria ſatis erit.

122. Si triplex ſeſe offerat incognita, eodem modo poteris procedere, ſubſtituendo primo unam, deinde aliam, donec unica relinquatur; prolixa tamen evadet operatio; nec deeſt methodus laborem, ac tædium minuendi. Nos brevitati conſulentes hæc omittimus, apud alios, ſi placeat, legenda, cum rarius occurrat in praxi caſus trium incognitarum.

CAPUT IV.

ALIQUA PROBLEMATA ARITHMETICA PRIMI GRADUS.

123. Problemata primi gradus ea dicimus, in quibus incognita non tranſcendit primum gradum (*num.* 104).

114. Pro-

124. Problema I. *Invenire numerum, qui multiplicatus per 6, demptiſque inde 9, efficiat 21.* In hoc facillimo problemate ſtatim vides, unicam eſſe incognitam, numerum nempe quæſitum, qui vocetur x; unicam ſimiliter conditionem; nempe, quod ipſe numerus x ductus in 6, demptiſque 9, ſit æqualis 21. Hæc conditio algebraice expreſſa erit $6x - 9 = 21$: igitur tranſponendo, (*num.* 116) $6x = 21 + 9$, & dividendo (*n.* 118) $x = \frac{21+9}{6}$, ideſt, $x = 5$, qui numerus conditionem problematis adimplet.

125. Problema II. *Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit 100, & quorum differentia ſit 22.* Duæ ſunt incognitæ, quarum major dicatur x, minor y. Duæ itidem conditiones exprimendæ: I, quod ſumma incognitarum ſit 100: II, quod ipſarum differentia ſit 22. Fac $100 = a$, & $22 = b$; erunt conditiones algebraice expreſſæ.

Prima	$x + y = a$
Hinc vero (*n.* 116)	$x = a - y$
Secunda conditio	$x - y = b$
Et ſubſtituendo (*n.* 121)	$a - y - y = b$
Tranſponendo	$a - b = 2y$
Dividendo	$\frac{a-b}{2} = y$
Id eſt	$39 = y$

Deinde, quia in ſecunda æquatione fuit $x = a - y$, fiet $x = 61$: hi numeri 61, 39 conditionibus problematis ſatisfaciunt.

126. Problema III. *Invenire duos numeros, quorum ſumma ſit 126, quique ſint inter ſe, ut 5 ad 9*. Sit numerus major z, minor x, $126 = a$, $9 = c$, $5 = b$.

Prima conditio	$z + x = a$
Tranſponendo	$z = a - x$
Secunda conditio	$x : z :: b : c$
Fiet æquatio (*n.* 114)	$cx = bz$
Subſtituendo	$cx = ab - bx$
Tranſponendo	$cx + bx = ab$
Dividendo	$x = \frac{ab}{c+b} = 45$

Ex ſecunda æquatione facile jam habetur $z = 81$. Numeri ergo quæſiti ſunt 45, 81; quorum quidem ſumma eſt 126, quique conſtituunt analogiam $45 : 81 :: 5 : 9$.

127. Problema IV. *Invenire numerum, cui ſi addas quartam ejus partem, ab eodemque demas quintam, & tertiam partem, reſiduum ſit* 43. Numerus vocetur x, ejus partes *quarta, quinta, & tertia* ſint $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{5}$, $\frac{x}{3}$: Sit quoque $43 = a$.

Conditio problematis eſt algebraice $x + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{x}{3} = a$. Reducendo igitur ad communem denominatorem (*num* 90) erunt $x + \frac{15x}{60} - \frac{12x}{60} - \frac{20x}{60} = a$, id eſt (*num.* 91) $x - \frac{17x}{60} = a$: hinc multiplicando, $60x - 17x$,

17x, ideſt, $43x = 60a$; $x = \frac{60a}{43} = 60$.

128. Problema V. *Aſina clitellis dicebat mulæ ſociæ; ſi unus ex ſaccis, quos porto, tibi imponeretur, onere pares eſſemus; ſi vero unus ex tuis imponeretur mihi, meum onus fieret duplum tui. Quæruntur utriuſque ſacci?* Sacci aſinæ ſint x, mulæ z; dum aſinæ ſaccus mulæ imponitur, hæc habet $z + 1$, illa vero $x - 1$. Prima conditio hoc in caſu eſt $z + 1 = x - 1$

$$z = x - 2$$

Præterea dum mulæ ſaccus ad aſinam transfertur, hæc habet $x + 1$, illa vero $z - 1$, cujus duplum eſt $2z - 2$. Secunda igitur conditio eſt $x + 1 = 2z - 2$

Tranſponendo, $x + 3 = 2z$

Subſtituendo $x + 3 = 2x - 4$

$$4 + 3 = 2x - x$$

$$7 = x$$

Igitur aſinæ ſacci ſunt 7; & ex ſecunda æquatione apparet mulam habuiſſe 5.

129. Problema VI. *Invenire numerum, qui additus ad 20, & ſubtractus a 200, faciat ſummam, & differentiam, quæ ſint inter ſe, ut 5 ad 8.* Hoc, & ſequentia problemata per temetipſum jam reſolve, & ſic procede. Numerum voca x, qui additus ad 20 erit $20 + x$, ſubtractus a 100 erit $100 - x$. Reliqua ſunt clara.

130. Problema VII. *Alexander de ætate ſua a Caliſtene interrogatus, reſpondit. Ego Epheſtionem meum duobus annis antecedo, at Clitus ætatem amborum, & inſuper 4 annos habet.*

Cui Caliſtenes; cum pater meus vixerit annos 96, jucunda fuit mihi iſta relatio, O Rex, nam annos trium veſtrum ætas ejus præciſe habuit. Quæritur, quot habuerint annos Alexander, Clitus, & Epheſtio? Sic procede: anni Alexandri ſint x; Epheſtionis erunt $x + 2$ &c.

131. Problema VIII. *Quidam in teſtamento 3000 aureorum inter uxorem, & filium, & duas filias diſtribuit hac conditione, ut portio filii ſit dupla portionis matris, & portio hujus dupla portionis cujuslibet filiæ. Quæritur quantum cuique competit?* Incipe a portione unius filiæ, quam voca x, reliqua omnia facile dignoſcentur.

132. Problema IX. *In exercitu, in quo adſunt pedites, & equites, & milites tormentarii, pedites ſunt 60000; equites ſunt decima pars peditum, & tormentariorum duodecima; tormentarii vero ſunt quarta pars equitum, additis 192; quæritur quot ſint equites, quot milites tormentarii?* Problema eſt duplicis incognitæ: ſint equites x, tormentarii z, $60000. = a$, $10 = b$, $12 = c$, $192 = d$. Prima igitur conditio erit $x = \frac{a}{b} + \frac{z}{c}$ &c.

CAPUT V.

DE APPLICATIONE ALGEBRÆ AD GEOMETRIAM.

133. PLuſquam mediocri geometricarum rerum notitia inſtructum eſſe oportet, qui in hac applicatione cupit exerceri; pendet enim

enim plerunque problematum ſolutio a variarum propoſitionum uſu, earumque combinatione; quin aliqua aſſignari poſſit certa lex, cur hæc potius, quam illa propoſitio ſit in ſubſidium advocanda. Omnes igitur ſibi reddat analyſta familiares; atque eas maxime, in quibus agitur de *proportionibus*, de *rectangulis*, & de *triangulorum ſimilitudine*; attentis enim diverſis ubique circumſtantiis, ipſe induſtrioſus decernet, quænam commodius requirantur.

134. Lineæ exprimendæ ſunt plerunque unica littera, niſi notum habeant dimidium, cujuſmodi eſt e. g. circuli diameter; melius enim tunc exprimuntur littera geminata, ut $2a$. Areæ ſcribantur forma rectanguli, ut ab, vel aa; niſi id ex circumſtantiis ſuperfluum videatur. Solida vero corpora forma cuborum, ut aaa.

135. Non levi præterea attentione curandum, ut omnia exprimantur minima poſſibili litterarum varietate; e.g. ſi nominanda veniat linea AB (*fig* 110), in qua totum AB dicitur a, & pars CB vocatur x; pars altera AC nequaquam dicenda erit z, ſed $a - x$.

136. Duplici fine a geometris uſurpari ſolet algebra; primo ad detegenda, & demonſtranda theoremata; ſecundo ad inveniendas incognitas quantitates. Secundus hic finis primum etiam involvit; ea enim eſt vis operationum algebræ, vel analyticæ, vel ſyntheticæ, ut etiam nolentibus theoremata univerſalia ubique offerat; in omni enim operatione, ſi loco litterarum verba ſubſtituas, & proferas, eo ipſo

ipſo theorema aliquod enuntiaſti. Proponamus exempla aliqua, & quidem prioris generis ſine incognitis.

137. *Data linea AD* (fig. 111) *in tres, aut plures partes diviſa, & data alia linea E, quærere proportionem, quam habet rectangulum ſub linea E, & integra AD, ad rectangula ſub ipſa E, & ſingulis partibus AD.* Partes lineæ AD vocentur $a + b + c$, linea E vocetur d: rectangulum ergo primum erit $ad + bd + cd$; rectangula autem partium erunt omnino idem $ad + bd + cd$. Theorema igitur eſt *rectangulum ſub integris lineis æquatur ſummæ rectangulorum partium unius per alteram.* En propoſitionem 1. lib. 2. Euclidis nedum demonſtratam, ſed mira facilitate inventam.

138. *Si recta AB* (fig. 110) *ſecta ſit utcunque in C, quærere proportionem, quam habent inter ſe quadratum totius AB, & quadrata partium AC, BC, & rectangula ex tota & partibus, & rectangula ipſarum partium inter ſe.* Linea in duas partes diviſa nominetur $a + b$. Quadratum totius erit $aa + 2ab + bb$: ideſt adæquat, ſeu continet quadrata partium $aa + bb$, & bina rectangula ab ex partibus facta; quod quidem eſt prop. 4 lib. 2. Euclid.

139. Secundo; cum tota linea ſit $a + b$, & partes etiam $a + b$; patet ipſum quadratum $aa + 2ab + bb$ fore productum ex partibus per totam lineam, ſeu ipſi æquari. En inventam prop. 2. lib. 2. Euclid.

140. Tertio; cum pars quadrati $ab + bb$ ſit idem atque $a + b$ multiplicata per b; patet,

tet, rectangulum totius lineæ $a+b$ ductæ in unam partem b æquari rectangulo ab ex partibus inter ſe, & quadrato bb ipſius partis b. Quod eſt prop. 3. ejuſd. lib.

141. Quandoquidem de propoſitionibus Euclideis libri 2. mentio facta eſt, juvat hoc loci reliquas uſque ad 10 recenſere; quas quidem ex Geometria huc transferendas judicavimus.

Propoſitio 5. *Si recta AB* (fig. 112) *ſecta fuerit æqualiter in C, & inæqualiter in D, erit rectangulum ſub inæqualibus partibus AD, BD una cum quadrato partis intermediæ CD, æquale quadrato dimidiæ CB.* Dimidia AC, vel CB ſit $= a$, CD ſit $= b$; erit DB $= a-b$, AD $= a + b$: rectangulum partium AD, BD erit $aa - ab + ab + bb = aa + bb$; ſed aa eſt quadratum dimidiæ, bb eſt quadratum partis intermediæ: ergo &c.

142. Propoſitio 6. *Si recta AB* (fig. 113) *ſecta fuerit biſariam in C, eique adjiciatur BD, erit rectangulum ſub tota compoſita AD, & adjecta BD contentum, una cum quadrato dimidiæ CB, æquale quadrato CD ex dimidia, & adjecta.* Fac AB $= 2a$, BD $= b$; erit CD $= a + b$; cujus quadratum eſt $aa + 2ab + bb$; idem, continet quadratum aa dimidiæ, continet rectangulum $2ab$ ex tota, & adjecta, & continet quadratum bb adjectæ; *q. e. d.*

143. Eadem facilitate, & methodo poterit Tyro exercitii cauſa alias demonſtrare propoſitiones, quarum titulos huc ex Tacqueto tranſcribemus. Prop. 7. *Si recta AB* (fig. 110) *ſit utcunque ſecta in C; erunt quadrata totius AB,*

AB, *& ſegmenti alterutrius AC æqualia duplo rectangulo, ſub tota AB, & ſegmento dicto AC, una cum quadrato ſegmenti alterius BC*.

144. Prop. 8. *Si recta AB* (fig. 113) *ſit bifariam ſecta in C, eique alia adjiciatur BD; erit rectangulum ACD, quod ſub AC dimidia, & CD compoſita ex dimidia, & adjecta continetur, quater ſumptum, una cum quadrato adjectæ BD, æquale quadrato totius compoſitæ AD*.

145. Prop. 9. *Si recta AB* (fig. 112) *diviſa ſit bifariam in C, & non bifariam in D, erunt quadrata partium inæqualium AD, BD dupla quadratorum dimidiæ AC, & partis intermediæ CD*.

146. Prop. 10. *Si recta AB* (fig. 113) *ſit biſſecta in C, eique adjiciatur BD, erunt quadrata totius compoſitæ AD, & adjectæ BD dupla quadratorum, quæ deſcribuntur ſuper dimidia AC, & ſuper CD, compoſita ex dimidia & adjecta*.

147. Quando in æquationibus interveniunt incognitæ, eodem modo diximus enuntiari poſſe theoremata. Sit exemplo problema propoſitum num. 125, in quo quærendo valorem numeri minoris y, incidimus in hanc æquationem $y = \frac{a-b}{2}$; ſi eadem methodo quæras valorem majoris numeri x invenies $x = \frac{a+b}{2}$. Jam vero ſi ponamus a ſignificare quamlibet ſummam, b quamlibet differentiam, y & x quaſcunque quantitates, ſic enuntia-

tiabitur theorema. *Datis duabus quantitatibus, earum ſemiſumma, minus ſemidifferentia æquatur minori* ($\frac{a-b}{2} = y$); *earum ſemiſumma plus ſemidifferentia æquatur majori* ($\frac{a+b}{2} = x$).

148. Poteſt præterea theorema quodvis proferri per analogiam, cum omnis æquatio in analogiam convertatur, & viciſſim (*num.* 114), educendo primum, & ultimum terminum ex uno æquationis membro, medios vero terminos ex altero. Sit exemplo æquatio $ab = cx$; diſtinctis terminis in utroque membro fiet $a : x :: c : b$. Vice litterarum nunc verba ſupple, habebis theorema per analogiam expreſſum. En alia exempla converſionis æquationum in analogias attente conſideranda, $2a = x$, fac $2 : x :: 1 : a$; habet enim x pro coefficiente unitatem (num. 67); $a - b = cx$, fac $a - b : c :: x : 1$; termini $a - b$ concipiuntur inſtar unius multiplicati per unitatem; $ax - bx = cd$, fac $a - b : c :: d : x$, termini $ax - dx$ concipiuntur inſtar unius $a - b$ multiplicati per x; $ab + bc = xx$, fac $a + c : x :: x : b$, littera x bis ponitur, id eſt, eſt media proportionalis inter extremas quantitates; $x = \frac{ab}{c}$, fac primo (num. 119) $cx = ab$, tunc autem $c : a :: b : x$.

De inventione incognitarum in problematibus Geometricis.

149. Alter eſt hic analyſtarum finis notatus (*num.* 136); regula vero practica uno verbo ſic habet. *Suppone factum jam illud, quod quæritur; tum ductis, ſi opus ſit, lineis aliquot, quæ triangula, & rectangula conſtituant, incognita ex ipſarum comparatione eruatur.* Procedamus ſtatim ad exempla.

150. Problema I. *Data linea AC* (fig. 117) *diviſa utcunque in B, eam iterum ita ſecare in D, ut ſit DC media proportionalis inter AD & BD.* Nota, lineam jam ſectam ſupponi in D, antequam punctum D determinetur, juxta modo dicta. Fac $AB = a$, $BC = b$, $BD = x$, erit $AD = a + x$, $DC = b - x$. Per conditionem ergo problematis $a + x : b - x :: b - x : x$. Hinc vero (*num.* 114) $bb - 2bx + xx = ax + xx$, $bb = ax + 2bx$, $\frac{bb}{a + 2b} = x$. En inventam quantitatem x, quam adde ad AB, & dabit exacte punctum D.

151. Probl. II. *Data ſumma trium laterum, ſeu perimetro trianguli rectanguli BAC* (fig. 115), *una cum ipſius area, invenire hypotenuſam BC.* Sit area $= a$ (quam hic exprimere per $2a$ non videtur neceſſarium), ſit tota perimeter $= c$, $CB = x$; erit ſumma laterum BA, $CA = c - x$, cujus quadratum $cc - 2cx + xx$ excedit quadrata ſingularum BA, CA bis rectangulo AB, AC (*num.* 138. *prop.* 4. *lib.* 2).

Cum

Cum autem hujuſmodi rectangulum ſit $= 2a$ (*prop.* 41. *lib.* 1), erit bis ſumptum $= 4a$. Hinc quadrata ſingularum BA, CA $= cc - 2cx + xx - 4a$; quapropter (*prop.* 47. *lib.* 1.) $xx = cc - 2cx + xx - 4a$, $2cx = cc - 4a$, $x = \frac{cc - 4a}{2}$, ſeu $x = \frac{1}{2}c - \frac{2a}{c}$. Ex ultima hac æquatione eruere poteris ſequens theorema (num. 136); *Hypothenuſa trianguli rectanguli æquatur dimidio perimetro, minus quotientem duplæ areæ diviſæ per perimetrum.*

152. Probl. III. *Datis in quadrilatero, circulo inſcripto, lateribus omnibus, & diagonali BO* (fig. 116), *quæritur diagonalis altera AE.*

Ducatur BD, ita ut angulus EBD æquetur alteri ABO. Sit deinde AB $= a$, BE $= b$, EO $= c$, OA $= d$, OB $= f$, ED $= x$, DA $= y$. Triangula EBD, ABO ſunt ſimilia, nam anguli ad B æquantur per conſtructionem; anguli autem ad O, & E inſiſtunt eidem arcui BA, ſunt ergo BO : OA :: BE : ED, id eſt $f : d :: b : x$; quapropter eſt $bd = fx$, $\frac{bd}{f} = x$.

153. Similia pariter ſunt triangula EBO, DBA, anguli namque ad B æquantur per conſtr. anguli vero ad O, & A inſiſtunt eidem arcui BE; ergo BO : OE :: BA : AD, id eſt $f : c :: a : y$, $fy = ca$, $y = \frac{ca}{f}$: nunc additi x, & y dabunt integram EA, quam ſi vocaveris z, erit $z = \frac{ac + bd}{f}$. Cui æquationi ſupplendo verba, ſuccedit theorema: *In omni quadri-*

drilatero circulo inſcripto, diagonalis quælibet æquatur ſummæ duorum rectangulorum ex lateribus inter ſe oppoſitis, diviſæ per diagonalem alteram.

154. Sed dicta hactenus circa problemata ſint ſatis, quæ in ſpecimen tantummodo ſunt adducta, ut nempe circa algebræ utilitatem ferre poſſes judicium aliquod, antequam ulterius progrederemur.

CAPUT VI.

COMPUTUS POTESTATUM ET RADICALIUM QUANTITATUM.

155. Quid ſint potentiæ, quid radices, jam (*num.* 103) dictum eſt; & (*num.* 105.) expoſuimus ſeriem potentiarum ab unitate incipientem; quæ ſeries in infinitum poteſt creſcere, vel decreſcere, ut in ſequenti paradigmate a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{0}, a^{1}, a^{2}, a^{3} &c; ubi a^{0} eſt terminus medius, a quo verſus dexteram exponentes creſcunt, verſus ſiniſtram decreſcunt æquali ſemper exceſſu. Exponentes vero 1, 2, 3 &c. aſſumuntur non neceſſario, ſed ad libitum; nam quilibet numeri arithmetice creſcentes, ut 3, 6, 9 &c. agere poſſent vices exponentium; immo quælibet fractiones arithmeticæ, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, ex quibus poteſt componi ſeries apparenter creſcens, revera tamen eo magis decreſcens, quo majores ſunt fractionum denominatores,

ut

ut perpendenti ſit manifeſtum. Quapropter generalis ſeries potentiarum ſic communiter exprimitur: a^m, a^{m+n}, a^{m+2n}, a^{m+3n} &c.

156. Multiplicatio potentiarum fit addendo exponentes (*num.* 81.) $a^3 \times a^2 = a^5$. Hinc ſi a^3 multiplicetur per a^0, fiet $a^{3+0} = a^3$: eſt ergo a^0 quantitas talis, per quam a^3 nihil immutatur: hoc autem cum ſit proprium unitatis, manifeſtum inde ſit, eſſe a^0 unitati æqualem.

157. Rurſus $a^{-2} \times a^2 = a^{2-2} = a^0$: eſt ergo a^0 ſeu unitas terminus medie proportionalis inter duas ſeries creſcentem, & decreſcentem, quæ proinde ſimul ſumptæ unicam conſtituunt ſeriem geometricam; quamobrem erit $a^2 : 1 :: 1 : a^{-2}$; ſed etiam $a^2 : 1 :: 1 : \frac{1}{aa}$: ergo $a^{-2} = \frac{1}{aa}$. Similiter oſtenditur eſſe $a^{-3} = \frac{1}{aaa}$. Et univerſim, quælibet quantitas elevata ad exponentem negativum æquatur unitati diviſæ per eamdem potentiam poſitivam.

158. Si una potentia elevanda ſit ad aliam, e. g. ſi a^3 aſſumpta tanquam radix elevari debeat ad quadratum, multiplicetur exponens 3 per exponentem quadrati, nempe 2, & habebitur a^6: eſt enim $a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3 \times 2}$.

159. Signum radicis extrahendæ, quod diximus eſſe $\sqrt{}$, cum nullo afficitur exponente, ſemper ſignificat radicem ſecundam, ſeu quadratam. Cum alias radices ſignificare debet, notatur exponente illius poteſtatis, cujus radicem refert, e. g. $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, vel $\sqrt{}^3$, $\sqrt{}^4$, radix tertia, radix quarta.

160. Cum ergo a pluries multiplicatum producat potentias a^2, a^3, a^4 &c. Conſtat idem-met a fore $\sqrt{a^2}$, $\sqrt[3]{a^3}$, $\sqrt[4]{a^4}$ &c. ac proinde hæ expreſſiones, in quibus idem eſt exponens in radice, & in potentia, ſunt omnes inter ſe, & radici æquales; atque ſublato radicali ſigno, poſſunt omnes exprimi ſequenti modo, $a^{\frac{2}{2}}$, $a^{\frac{3}{3}}$ &c. Sic etiam eſt evidens ex dictis (*num.* 158), eo quod diviſio, & multiplicatio opponantur, expreſſiones $\sqrt[2]{a^6}$, $a^{\frac{6}{2}}$, a^3 eſſe omnino æquivalentes, & in genere $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$, $\sqrt[m]{c} = c^{\frac{1}{m}}$.

161. Hinc primo, ad extrahendam a qualibet potentia quamlibet radicem, dividendus eſt exponens potentiæ per exponentem radicis, ſic $\sqrt{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

162. Hinc ſecundo, ſublato radicali ſigno, poteſt quantitas radicali affecta, exprimi inſtar poteſtatis fractionem habentis pro exponente, cujus denominator ſit exponens radicis, numerator vero ſit exponens ipſius poteſtatis. Vide exempla modo adducta.

163. Ex quo illud etiam profluit non contemnendum, poſſe nempe terminos eo pacto radicalibus liberari, & calculus per regulas hucuſque datas expediri. Veruntamen quia commodius ſæpe eſt eiſdem radicalibus in computando uti: en breviter regulas radices tractandi.

164. Radix ante terminum conſtituta afficit

cit omnes litteras ipſius termini: poſita vero in medio termino afficit ſequentes tantum litteras, nec impedit ipſarum multiplicationem per præcedentes $\sqrt{abc}$ ideſt, radix ſecunda totius *abc*; $db\sqrt[3]{ac}$, id eſt, *db* multiplicatum per radicem tertiam *ac*.

165. Sicut liberum eſt e quantitatibus radicalia tollere (*num.* 162); ita quoque liberum eſt quantitatem radicali afficere, quin ejus valor immutetur; dummodo exponens radicis ſupra litteras etiam ſcribatur; ſic $a = \sqrt[n]{a^n}$; $ab = \sqrt[m]{a^m b^m}$ (*num.* 160).

166. Ex quo patet primo, methodus reducendi radicalia ad faciliorem expreſſionem, ſicut enim $\sqrt[n]{a^n} = a$, ſic $\sqrt{aab}$ reducitur ad $a\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{b^3 cd}$ reducitur ad $b\sqrt[3]{cd}$, extracta nempe radice ab iis litteris, a quibus poteſt extrahi (*num.* 161), & relictis cæteris ſub radicali.

167. Patet ſecundo methodus liberandi radicalem a coefficiente: ſint enim expreſſione $a\sqrt[n]{b}$, $a\sqrt[n]{\frac{b}{c}}$, $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$, ſic poſſint ſcribi $\sqrt[n]{a^n b}$, $\sqrt[n]{a^n \frac{b}{c}}$, $\sqrt[n]{\frac{a^n d}{b^n c}}$.

168. Patet tertio methodus reducendi duo, aut plura radicalia ad eundem exponentem; ſint enim $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, fieri poteſt $\sqrt[mn]{a^m}$, $\sqrt[mn]{b^n}$.

169. Additio, ſubtractio, multiplicatio, & di-

& diviſio radicalium fiunt plerunque juxta communes leges litterarum (*num.* 60, 74, 75, 76) Multiplicatio tamen, & diviſio poſſunt etiam fieri, prout ſequitur.

170. Sint quantitates multiplicandæ $\sqrt[n]{a}$, & $\sqrt[m]{b}$, reduc eas primo ad communem exponentem $\sqrt[mn]{a^m}$, $\sqrt[mn]{b^n}$ (*num.* 168). Tum ſcribe quantitates multiplicatas ſub unico ſigno $\sqrt[mn]{a^m b^n}$, dico factum: ratio clare conſtat ex inſpectione exempli numerici; nam $\sqrt{4}$ ducta per $\sqrt{9}$, ideſt $2+3$, tali modo expreſſa, erit $\sqrt{36}=6$.

171. Atque inde patet methodus elevandi radicalem $\sqrt[n]{a}$ ad poteſtatem m, ſi nempe fiat $\sqrt[n]{a^m}$.

172. Pro diviſione, cum hæc multiplicationem deſtruat, reductis radicalibus ad communem exponentem, ſcribe quantitates diviſas ſub unico ſigno; ſic $\sqrt{a}$ diviſa per $\sqrt{b}$ erit $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Ratio fiet manifeſta, appoſitis numeris.

173. Ad computus facilitatem conducit multoties radicalia ſigna tollere per elevationem æquationum integrarum ad potentias; e.g. æquatio $a=\sqrt{b}$, non ſolum liberatur radicali, ſi fiat (*num.* 162) $a=b^{\frac{1}{2}}$, ſed commodius ſi fiat $aa=b$. In hac æquatione $a+b=c\sqrt{b}$ fac

fac primo $\frac{a+b}{c} = \sqrt{b}$, & deinde

$\frac{aa+2ab+bb}{cc} = b$.

174. Tandem, ut leges hucuſque dictæ circa potentias, & radices facilius mente comprehendi queant, omnes ſimul aliquo in exemplo, ſeu formula ante oculos proponamus. Sint datæ poteſtates binæ ejuſdem litteræ a^m, a^n.

Earum ſumma erit $a^m + a^n$ (n. 74)

Differentia $a^m - a^n$ (n. 75)

Factum a^{m+n} (n. 81)

Quotiens a^{m-n} (n. 96)

Elevatio ad potentiam p a^{pm}, a^{pn} (n. 158)

Extractio radicis q $a^{\frac{m}{q}}$, $a^{\frac{n}{q}}$ (n. 161)

Sint etiam potentiæ a^m, c^{-n}

Summa erit $a^m + c^{-n}$ (n. 74)

Differentia $a^m - c^{-n}$ (n. 75)

Factum $a^m c^{-n}$ (n. 76)

Vel $\frac{a^m}{c^n}$

Nam $c^{-n} = \frac{1}{c^n}$ (n. 157)

Quotiens ob eamd. rationẽ $a^m c^n$

vel per regulas communes $\frac{a^m}{c^{-n}}$

Elevatio ad potentias, & extractio radicis nihil differunt a ſuperiori.

175. Quod attinet ad radices; ſint datæ binæ ſimplices $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, hæ expreſſæ in potentiarum forma

Erunt $a^{\frac{1}{m}}, b^{\frac{1}{n}}$ (n. 162)

Reductæ ad com. expon. $\sqrt[mn]{a^n}, \sqrt[mn]{b^m}$ (n, 168)

Summa $\sqrt[m]{a} + \sqrt[n]{b}$ (n. 169)

Differentia $\sqrt[m]{a} - \sqrt[n]{b}$ (n. 169)

Factum $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{b}$ (n. 169)

Vel $\sqrt[mn]{a^n b^m}$ (n. 170)

Quotiens $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (n. 169)

Vel $\sqrt[mn]{\frac{a}{b}}$ (n. 172)

Elevatio ad potentiam p, $\sqrt[m]{a^p}$, $\sqrt[n]{b^p}$ (n. 171)

Viciſſim extractio rad. r, $\sqrt[m]{a^{\frac{1}{r}}}$, $\sqrt[n]{b^{\frac{1}{r}}}$

Sint proinde radices coefficientibus affectæ $c\sqrt[m]{a}$, $b\sqrt[n]{d}$; ut alias circa hujuſmodi radices ommittam leges, eas primo a coefficientibus libera (*num.* 167): reliqua deinde fiant, ut in formulis ſuperioribus.

CA-

CAPUT VII.

DE EXTRACTIONE RADICIS QUADRATÆ IN NUMERIS.

176. UT clarius percipias artificium, quo in numeris inveniri ſolet quadrata radix, ſuppone binomium $a + b$, ad quadratum elevari, ſeu per ſemetipſum multiplicari; orietur inde factum $aa + 2ab + bb$ tribus terminis conſtans, quorum primus aa eſt quadratum primæ notæ radicalis a, tertius bb eſt quadratum ſecundæ notæ b, medius $2ab$ eſt duplum factum primæ notæ per ſecundam.

177. Pone nunc, ignotam tibi eſſe radicem $a + b$, eamque eruendam ex quadrato $aa + 2ab + bb$; patet, primam figuram a haberi poſſe ex primo termino aa, ſecundam vero b haberi poſſe ex ſecundo termino $2ab$, illum nempe dividendo per duplum primæ litteræ: hæc autem ſecunda talis eſſe debet, ut ejus quadratum bb, & ipſius factum per duplum ſecundæ, ſcilicet $2ab$, auferri poſſint ex $2ab + bb$. Hiſce omnibus diligentiſſime animadverſis, procedamus ad numeros.

178. Tenenda inprimis ſunt memoriter quadrata omnia ad 100 non pervenientia, ipſorumque radices.

Quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100.
Radic.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.

Conſtat ex conſideratione horum quadratorum, nullum numerum unica nota expreſſum, continere in quadrato pluſquam duas notas; nam minimus duarum notarum nempe 10,

 habet

habet pro quadrato minimum trium, nempe 100: & ſi ulterius ad alios numeros aſcendamus, palam ubique fiet, nullam radicem continere in quadrato pluſquam duplum ſuarum notarum.

179. Proponatur jam extrahenda radix a numero 2916. Cum ipſa contineat 4 notas, duæ tantummodo erunt in radice. Scribatur ergo in A, & incipiendo a dextima nota 6, dividatur in membra ad ſingulas binas notas, quæ ſi eſſent impares e. g. 916, relinqueretur unica 9 ex altera parte verſus ſiniſtram.

A	29,16 (54	B	
	25		
D	416	E	
	100		400
	416		16
	000		416

180. Numerus ſic diviſus tractari nunc debet eo modo, quo (*num.* 177) tractavimus quadratum litterale. Ex prima parte 29 erue primam litteram radicis ope laterculi ſuperioris, quæ cum non adſit exacta, accipienda ea, quæ ibi eſt proxime minor, nempe 5, & ſcribenda in B: pone deinde quadratum hujus litteræ 5 ſub 29, & facta ſubtractione, ſcribe in D reſiduum 4. Nunc deſcendendo transfer ſecundum membrum 16 ad locum D poſt 4, & ex toto numero 416 erue alteram litteram radicis, talem, ut ejus productum per duplum primæ 5 inſimul cum ipſius quadrato ſubtrahi poſſint ex numero 416. Duplica ergo litteram 5, quæ cum poſt ſe debeat habere aliam, cogitari jam poteſt, non tanquam 5, ſed tanquam 50, cujus duplum eſt 100: ſcribe 100 ſub 416, & quære quotientem inter 416, & 100. Hic quotiens eſt quidem 4, ſecunda no-

ta

ta radicalis ; antequam tamen ſcribatur in B, perpende, utrum illi competant conditiones debitæ. Itaque duc 4 in 100, & habebis in E productum 400, fac deinde quadratum 4, nempe 16, illudque additum ad 400 dabit in E ſummam 416. Debet hæc ſumma ſubtrahi ex dividendo D, ob conditionem; quod ſi fieri non poſſet, tentanda foret littera 3, vel alia etiam minor. In caſu tamen præſenti ſumma 416 exacte ſubtrahitur a dividendo D : numerus igitur 54, eſt radix quæſita.

181. Si plures duabus eſſe debeant notæ in radice, eadem operatio repetatur ad ſingulas. Tantummodo, dum quæritur e. g. tertia, binas antecedentes conſiderare oportet tanquam unicam, in ordine ad eformandum ipſarum duplum. Dum quæritur quarta, conſiderentur inſtar unius tres præcedentes &c. Sit exemplo numerus 60025, cujus quæratur radix, ſcribe illum in A, & in tria membra divide (*n.*179); igitur in A numerum vides membratim diviſum; in B radicem inventam; in D quadratum primæ notæ radicalis 2; in H reſiduum hujus quadrati a ſiniſtimo membro 6 ſublati, una cum ſecundo membro 00; in I habes 40 duplum nempe primæ notæ radicis 2 conſideratæ ut 20, propter notam ſubſequuturam. Jam vero H per I diviſum dat ſecundam notam radicis 4, cujus productum per I

A	6,00,25 (245		B
D	4		
H	200	160	E
I	40	16	
	176	176	
			G
F	2425	2400	
L	480	25	
	2425	2425	
M	0000		

eſt 160, illudque habes in E una cum quadrato 16, atque utriuſque ſumma 176, quæ ablata a numero H relinquit in F 24. Nunc ultimum membrum 25 apponendum eſt ad 24 in F, & binæ notæ radicis hucuſque inventæ, conſiderandæ ut unicum membrum, cujus duplum 48, ſeu ob notam futuram ulteriorem 480 ſcripſimus in L. Quotiens inter F, L eſt 5, tertia nota; quæ in G adimplet conditiones requiſitas, & facit ſummam 2425, ex qua profluit in M reſiduum o. Igitur radix exacta eſt 245.

182. Exempla bina propoſui radicis accuratæ; proferam modo aliud, in quo ea haberi nequeat, niſi per approximationem; quod in praxi frequentiſſimum eſt; cum aliunde conſtet numerum carentem radice integra carere etiam fracta. Itaque in hiſce caſibus per fractiones decimales fieri ſolet approximatio ad veram radicem; abſolutis enim jam membris numeri principalis, apponuntur ſemper ad reſiduum duo zeri, ut in ſequenti exemplo.

183. Inventis duabus notis radicalibus 75, incidimus in ſecundum reſiduum 47, cui ad inveniendam primam notam decimalium adjunximus oo, uti vides, & ſubter ſcripſimus duplicatum diviſorem 75, ideſt, 1500, ex quo prima nota fractionum 3, & poſt praxes conſuetas tertium reſiduum 191. Huic iterum adjunximus

```
          56,72 (75,312
          49
          ------
           7 72
           1 40
           7 25
           -------
R.2         4700
            1560
            4509
           -------
R.3          19100
             15060
          ----------
R.4           4039 &c.
```

ximus oo, ſimileſque operationes proinde uſurpantes, invenimus ſecundam, & tertiam fractionum notas, &, ſi libeat, plures poſſunt inveniri. Itaque radix hucuſque inventa eſt $75 \frac{312}{1000}$.

184. Radici quadraticæ adnecti ab analyſtis ſolet extractio cubicæ; quæ ſimili modo non difficulter in numeris habetur ex formula binomii $a + b$ ad cubum elevato, nempe $aaa + 3aab + 3abb + bbb$. Veruntamen, id habet incommodi radix cubica, ut fere nunquam obtineri queat, niſi per approximationem, nec algebraice exprimitur in ſolutionibus æquationum, ſine recurſu ad quantitates radicales omnino inauferibiles, id eſt ſine novis, & prolixis approximationibus. Præterea, in præſenti opuſculo ommittenda videtur, quia rarioris eſt uſus.

CAPUT VIII.

DE SOLUTIONE ÆQUATIONUM SECUNDI GRADUS.

185. ÆQuatio in genere duplex eſt, alia *ſimplex*, *affecta* altera: ſimplex ea dicitur, in qua incognita reperitur in unico tantum gradu, cujuſmodi ſunt $x = a$; $axxx + cxxx = ab + bc$. Affecta æquatio eſt, quando incognita ad duo, vel plures gradus elevata conſpicitur, ut $xx - bx + dx = c$

186. Termini omnes, in quibus incognita æqualiter elevatur, conſiderentur deinceps inſtar unici; hinc in præfata æquatione termini

$- bx$

$-bx+dx$ dici debent unus tantum, in quo incognita x multiplicatur per $-b+d$.

187. Æquationes ſimplices nullo negotio ſolvuntur; ſatis enim eſt incognitam ex una æquationis parte ſcribere ſolitariam; ex altera vero radicem extrahere ejus poteſtatis, ad quam incognita aſſurgebat: e. g. $xx=a$, fiat $x=\sqrt{a}$. Ad affectas igitur procedentes

188. Proponatur claritatis gratia problema ſequens. *Data ſumma duarum quantitatum, & ſumma quadratorum earundem, invenire quantitates*. Sit major quantitas x minor y, ſumma utriuſque $=b$, ſumma quadratorum $=c$.

Prima ergo conditio	$x+y=b$
	$x=b-y$
Secunda conditio	$xx+yy=c$
Subſtituendo	$bb-2by+yy+yy=c$
	$2yy-2by=c-bb$
	$yy-by=\frac{c-bb}{2}$

189. Hic nota primo, quadratum incognitæ yy in ultima æquatione ſigno affici poſitivo, quod ſemper omnino tranſpoſitionis ope curandum eſt, cum nullum quadratum eſſe poſſit negativum; oritur enim quadratum ex radice bis ſumpta ſub eodem ſigno.

190. Nota ſecundo, in ultima æquatione poſitam eſſe incognitam ſolitarie in maximo ſuo gradu, quod quidem fieri ſemper debet, ablatis omnibus coefficientibus, ac diviſoribus. Eſt tamen eadem incognita ob duplicem gradum, quem habet, taliter implicata, ut nequeat per regulas hucuſque datas liberari.

191. Ita-

191. Itaque, ad auferendam aliqualem confuſionem, quæ ex multiplicitate terminorum oriri poſſet, fac totum ſecundum membrum $= p$, erit $yy - by = p$. Patet ex contemplatione hujus æquationis, ad obtinendum valorem y neceſſarium fore radicem extrahere ab utroque æquationis membro; eſt enim y ad quadratum elevata. Jam vero radix ſecundi membri perfacile dignoſcitur numerice; conſtat enim quantitatibus cognitis: ex primo erui minime poteſt, niſi illud aut ſit, aut fiat perfecte quadratum: oportebit ergo membrum illum conferre cum aliquo quadrato jam noto, e. g. cum quadrato binomii $a + c$, id eſt $aa + 2ac + cc$, & ex collatione perſcrutari, num aliquid deſit.

192. Quadratum $aa + 2ac + cc$ tribus conſtat terminis: membrum $yy - by$ duobus tantum: deeſt igitur tertius terminus. At ſi in ſecundo termino $2ac$, ſive $2ca$ aſſumatur $2c$ pro coefficiente facile patebit, tertium terminum cc nihil aliud eſſe, niſi quadratum dimidii coefficientis $2c$: itaque, ſi poſt terminum $- by$ adjungatur quadratum dimidii coefficientis b, membrum illud evadet etiam perfecte quadratum; conſervabitur autem æquatio, ſi eadem quoque quantitas addatur alteri membro p.

193. Reaſſumpta ergo æquatione $yy - by = p$, addatur utrique $\frac{1}{4}bb$, quadratum nempe radicis $-\frac{1}{2}b$, fiet tota æquatio $yy - by + \frac{1}{4}bb = p + \frac{1}{4}bb$; & extractis hinc inde radicibus, erit $y - \frac{1}{2}b = \sqrt{p + \frac{1}{4}bb}$.

194. Hæc vero radix aſſumi poteſt tum poſitive,

ſitive, tum negative; eo quia utrolibet ſigno notata producit ſemper idem quadratum poſitivum; ac propterea ſolet ipſi præfigi duplex ſignum. Igitur $y - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{p+\frac{bb}{4}}$, & tranſponendo $y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{p+\frac{bb}{4}}$, atque hac de cauſa, quælibet æquatio ſecundi gradus duplicem habet ſolutionem.

195. En ergo inventum valorem y, inſimul cum practica methodo ſolvendi hoc æquationum genus, quæ methodus uno verbo hac unica lege comprehenditur. Adde utrique membro quadratum dimidii coefficientis ſecundi termini, extractiſque radicibus, debitam perage tranſpoſitionem.

196. Quid nomine ſecundi termini debeat intelligi, jam ſupra innuimus (*num.* 186), dum diximus $-bx+dx$ eſſe unicum terminum: ſed hæc litterarum multiplicitas nequid obſcuritatis pariat attendendum, & ſubſtitutione aliqua vitandum. Fiat e. g. $-b+d=r$: ſic bini termini litterales ad unicum rx ſine ulla confuſione reducentur.

197. Unum animadvertendum ſupereſt circa radices, quas vocant *imaginarias*. Millies jam dictum ſupra eſt, nullum dari quadratum negativum; radices ergo quantitatis negativæ $-aa$ impoſſibiles ſunt, atque imaginariæ; nulla enim quantitas in ſe ducta producit $-aa$. Itaque dari poteſt caſus, in quo quantitas $p+\frac{bb}{4}$ de qua (*num.* 194) prodeat negativa, ſi nem-

pe

pe p ſit major quam $\frac{bb}{4}$, & afficiatur ſigno $-$, quapropter eo in caſu incurreremus in ſolutionem æquationis impoſſibilem: hoc autem evidens ſignum erit aliquam conditionem impoſſibilem inductam fuiſſe in problema, quæque proinde auferri debeat.

198. Ex problemate adducto num 187 ſatis apparet priores in qualibet quæſtione operationes, tam in primo, quam in ſecundo, & in aliis gradibus eodem omnino modo perfici, juxta exempla propoſita a num. 123. Hinc difficultas graduum altiorum conſiſtit tantummodo in inveniendis radicibus ultimæ æquationis. Pro ſecundo autem gradu, quamquam ſatis eſſe poſſent, quæ hucuſque diximus, eadem tamen aliquibus quaſi formulis, ſeu exemplis ſunt ulterius illuſtranda.

199. Formula I. *Eruere radicem ubi incognita in unico tantum gradu reperitur.* Sit æquatio $xx = ab$; fiat $x = \sqrt{ab}$.

200. Formula II. *Radicem quærere, quando incognita adeſt in membro, quod eſt quadratum perfectum.* Ut $xx + 2bx + bb = a - d$: fac primo, extractis radicibus $x + b = \sqrt{a-d}$; & deinde $x = -b + \sqrt{a-d}$. (conſtat ex n. 191).

201. Formula III. *Radicem invenire, quando incognita non extat in membro quadrati perfecti:* ut $xx + 2bx = c$. Fac primo $xx + 2bx + bb = c + bb$, deinde $x + b = \sqrt{c+bb}$, tandem $x = -b + \sqrt{c+bb}$ (*num.* 192, 193). Aliud exemplum $xx - x = b$. Fac $xx - x$

$+ \frac{1}{4}$

$+\frac{1}{4}=b+\frac{1}{4}$ (nam coefficiens ſecundi termini $-x$ eſt 1), deinde $x-\frac{1}{2}=\sqrt{b+\frac{1}{4}}$; $x=\frac{1}{2}\mp\sqrt{b+\frac{1}{4}}$ (*num.* 193).

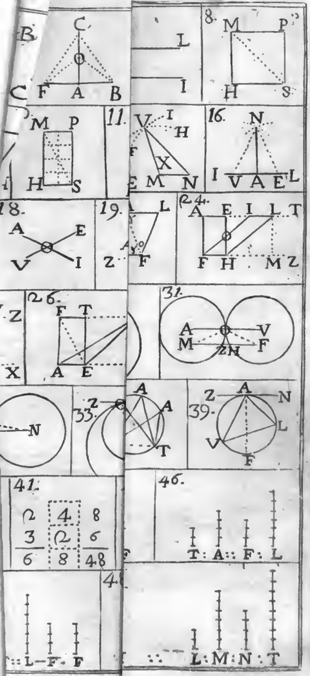
202. Formula IV. *Radices æquationis invenire cum ſecundus terminus eſt polinomius*: e. g. $xx+bx-cx=d$. Fac primo coefficientes $b-c=r$ (*num.* 196), æquatio in hanc tranſmutabitur $xx+xx=d$: tunc per conſuetas praxes fac $xx+rx+\frac{rr}{4}=d+\frac{rr}{4}$ (*num.* 193): demum $x+\frac{r}{2}=\sqrt{d+\frac{rr}{4}}$, $x=\frac{r}{2}+\sqrt{d+\frac{rr}{4}}$

203. Formula V. *Radices æquationis extrahere cum ſecunda potentia multiplicata eſt per quantitatem cognitam*. Ut $bxx-x=a$. Fac dividendo $xx-\frac{x}{b}=\frac{a}{b}$: tum vero, ne coefficiens fractus ſecundi termini $\frac{1}{b}$ aliquid perturbet, fac $\frac{1}{b}=r$; erit æquatio $xx-rx=\frac{a}{b}$ omnino ſimilis formulæ præcedenti, & eodem modo ſolvenda.

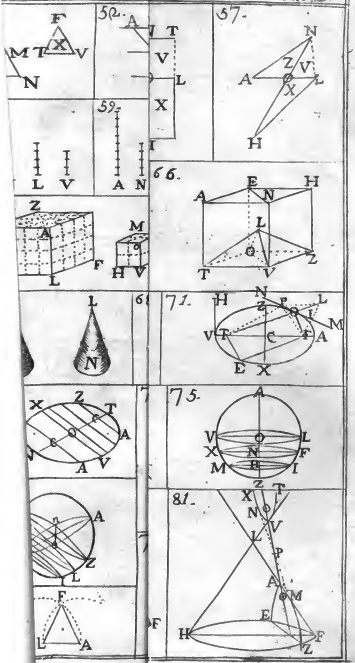
Cum hæc tantum in Adoleſcentium gratiam ſcripta ſint, altiores æquationis gradus conſultè prætermitto; ſatis enim eſt ea adhibuiſſe, quæ in praxi frequentiora, & Philoſophiæ ſtudioſis utiliora videntur: ſiquis ulteriùs progredi velit, adeat Caillium, qui in Algebra a num. 256 *cætera diligenter pertractavit*.

F I N I S.

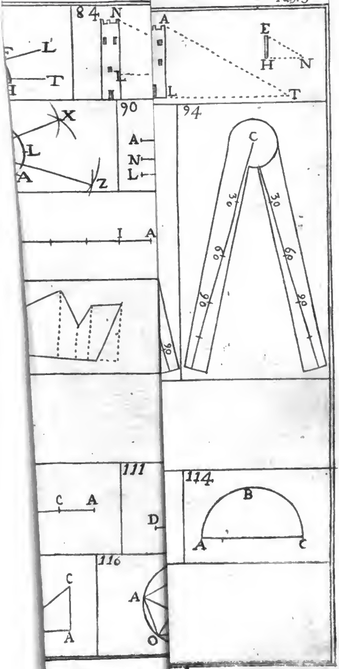
Proſtant Romæ apud Bened. Settari ad S. Ignatium.


8.
11.
16.
18.
19.
24.
26.
31.
33.
39.
41.
2 4 8
3 2 6
6 8 48
46.
T : A :: F : L
L : M : N : T

Tab. 2.



Tab. 3



5. 8. 2/76